



ПОДЗЕМПРОЕКТ®

Свидетельство саморегулируемых организаций:
НП «Объединение организаций в сфере проектирования
«Академический Проектный Центр (АПЦ)» от 27.04.2011
№ П-119-18012010-7743578813-0007-4

Утверждаю

Генеральный директор



С.С.Кнюк

Согласовано

Научный руководитель
докт.техн.наук, проф.

В.А.Ильичев

**ВЕРИФИКАЦИОННЫЙ ОТЧЕТ
ПО ПРОГРАММНОМУ КОМПЛЕКСУ MIDAS GTS**

ТОМ 1

Общие сведения. Матрицы верификации

Заказчик: MIDAS Information Technology Co., Ltd. (MIT), Корея, г. Соннам

Москва 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Общие сведения	5
2. Описание ПК MIDAS GTS	5
2.1 Расчетные возможности	5
2.2 Методы решения СЛАУ	6
2.3 Нелинейные решатели	6
2.4 Модели материала (грунта)	7
2.5 Библиотека конечных элементов	8
3. Верификация	11
4. Верифицируемые возможности	12
5. Теоретические основы	14
5.1 Физические условия задач. Описание расчётных моделей грунта	15
5.1.1 Упруго-пластический расчет	20
5.2 Анализ устойчивости грунтового массива методом снижения прочности	23
5.3 Методы решения	24
5.3.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	24
5.3.2 Получение нелинейного решения	27
5.4 Библиотека конечных элементов (КЭ)	32
5.4.1 Объемные (трехмерные) элементы	32
5.4.2 КЭ плоского деформированного состояния	36
5.4.3 Двумерные осесимметричные КЭ	40
5.4.4 Балочные КЭ	44
5.4.5 Пластинчатые (оболочечные) КЭ	48
5.4.6 Интерфейсные (контактные) КЭ	52

5.4.7 Свайные КЭ	61
5.4.8 Упругие связи	67
5.4.9 Жесткие связи	67
6. Матрицы верификации	68
7. Описание верификационных примеров	76
8. Результаты верификации	81
9. Проект свидетельства РААСН о верификации ПК MIDAS GTS	83
Список используемой литературы	86

Настоящий том содержит общие сведения о ПК MIDAS GTS, описание верифицируемых возможностей, а также матрицы верификации.

Руководитель работы: акад. РААСН, докт. техн. наук, проф. В.А.Ильичев (РААСН)

Ответственный исполнитель: канд. техн. наук Ю.А. Готман (ООО «Подземпроект»)

Экспертный состав:

1. докт. техн. наук, проф. Д.М.Шапиро (ВГАСУ, г. Воронеж).
2. канд. техн. наук В.Г.Федоровский (НИИОСП им. Герсегонова, г. Москва)
3. канд. техн. наук М.И. Карабаев (ООО «МИГТ», г. Москва)

Введение

«Грунты в качестве оснований, насыпей, сред, взаимодействующих с фундаментными и ограждающими конструкциями, являются наиболее распространенным и наиболее сложным (по математическому описанию) материалом в строительстве» [6]. Подобное мнение широко распространено не только среди специалистов, работающих в области механики грунтов и фундаментостроения. Понимание данного вопроса затрагивает также ученых, занятых в области расчета строительных конструкций, так как в конечном счете учет взаимодействия строительных конструкций с грунтовым массивом может оказаться определяющим фактором при принятии проектных решений.

Стремительно нарастающие темпы освоения подземного пространства и развитие прогрессивных технологий строительного производства ведет к необходимости освоения территорий ранее не пригодных для строительства ввиду сложных инженерно-геологических условий, повышения нагрузок на основание, увеличения глубин заложения фундаментов и т.д., т.е. все то, что соответствует инженерным идеям современного общества.

В связи с этим существующие инженерные подходы, отраженные в нормах проектирования оснований и фундаментов, часто не позволяют должным образом оценить или спрогнозировать поведение грунтового массива для многих задач современного строительства. Допущение о рассмотрении грунтового массива в виде сплошной среды дало возможность использования математического аппарата теории упругости и пластичности. С развитием компьютерных вычислительных возможностей начало формироваться относительно новое прикладное направление механики грунтов, сочетающее в себе основы МКЭ, механики сплошных сред и инженерного грунтоведения. Современные научные достижения в этом направлении позволяют решать самые различные задачи оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) грунтового массива, учитывающей историю нагружения, деформации пластического течения, реологические свойства грунта, теорию фильтрационной консолидации в одном комплексе, т.е. в рамках одного расчетного подхода.

Примером реализации такого подхода явилось появление таких специальных программных комплексов как PLAXIS, ZSOIL, FEMmodels, MIDAS GTS и др., разработанных специально для решения геотехнических задач. В последнее время геотехнический программный модуль стал появляться в таких универсальных расчетных комплексах, как ANSYS, ABAQUS, NASTRAN и др., а также в программах, ориентированных в большей степени на расчет строительных конструкций (SCAD, Lira, MicroFE, Stark).

1. Общие сведения

ПК MIDAS GTS является одним из программных продуктов компании MIDAS IT (**MIDAS Information Technology Co., Ltd.**), основанной в 1989 г. в Корее. MIDAS GTS разработан специально для применения в области геотехники и тоннелестроения. Данный ПК широко применяется в странах средней Азии, Японии и Европе при проектировании уникальных объектов гражданского, промышленного и транспортного строительства.

Пре- и пост-процессоры, отвечающие за интерфейс, графическую среду, разбиение сетки КЭ, а также вывод результатов расчетов разрабатываются непосредственно самой компанией MIDAS IT. Решатели, т.е. математический аппарат решения задач МКЭ, заложенный в программе, разрабатывается в компании TNO Diana.

2. Описание ПК MIDAS GTS

2.1 Расчетные возможности

В ПК MIDAS GTS представлены следующие расчетные возможности.

A. Статический расчет (Static Stress Analysis)

- 1) Линейный (Linear static stress analysis)
- 2) Нелинейный упругий и упруго пластический анализ (Nonlinear elastic & elasto-plastic analysis)

B. Расчет фильтрации воды

- 1) Расчет установившегося течения (Steady state analysis)

2) Расчет неустановившегося течения, т.е. во времени (Transient state analysis)

C. Совместный статический и фильтрационный расчет (Stress-Seepage Coupled Analysis)

D. Расчет консолидации грунта (Consolidation analysis)

E. Поэтапный расчет (Construction stage analysis)

- 1) Нелинейный
- 2) Установившаяся фильтрация
- 3) Неустановившаяся фильтрация
- 4) Консолидация

F. Расчет на динамические воздействия

- 1) Eigen value analysis
- 2) Response spectrum analysis
- 3) Time history analysis
- 4) Complex response analysis

G. Расчеты устойчивости

- 1) Метод снижения прочностных характеристик (Strength reduction method)
- 2) Предельное равновесия или напряженное состояние (Limit state stress analys)

2.2 Методы решения СЛАУ

А) Прямой решатель

- скайлайн

-мульт-фронтальный

Б) Итерационный решатель

CG and GMRES

Pre-conditioner

2.3 Нелинейные решатели

- ☐ Метод постоянных жесткостей (Constant stiffness method)
- ☐ Метод секущих жесткостей (Secant method)

- ☐ Метод Ньютона-Рафсона (Newton-Raphson method)
- ☐ Модифицированный метод Ньютона-Рафсона (Modified Newton-Raphson method)

Таблица 1. Методы получения нелинейного решения в соотношении с типами расчетного анализа

Типы расчета		Методы решения						
		Нелинейный расчет	Постатный расчет	Расчет фильтрации воды (установившееся течение)	Расчет фильтрации воды (неустановившееся течение)	Консолидация	Расчет устойчивости (предельное равновесие)	Расчет устойчивости (спinning с и ф)
Нелинейные расчеты	Метод постоянных жесткостей	✓	✓	-	-	✓	-	✓
	Метод секущих жесткостей жесткостей	✓	✓	-	-	✓	-	-
	Метод Ньютона-Рафсона	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Модифиц. метод Ньютона-Рафсона	✓	✓	-	-	✓	-	✓
Задание приращения нагрузки	Постоянный шаг	✓	✓	-	-	✓	-	✓
	Постоянный шаг	✓	✓	-	-	✓	-	✓
	Автоматическое задание шага	✓	✓	-	-	-	-	-
	Метод окаймляющих дуг	✓	✓	-	-	-	-	-
Ускорение сходимости по методу		✓	✓	-	-	✓	-	✓

2.4 Модели материала (грунта)

-линейная упругая модель (Linear Elastic Model);

-линейная модель трансверсально изотропного тела (Transversely Isotropic Model);

-модель Треска (Tresca Model), в отечественной литературе – модель Сен-Венана-Треска или третья классическая теория прочности;

-модель Мизеса (Von Mises Model), в отечественной литературе – модель Губера-Мизеса или четвёртая энергетическая теория прочности;

-упруго-пластическая модель Мора-Кулона (Mohr-Coulomb Model);

-упруго-пластическая модель Друккера-Прагера (Drucker-Prager Model);

-гиперболическая модель (Hyperbolic Model, Duncan-Chang Model);

-модель разупрочняющегося (при формоизменении) грунта (Strain Softening Model);

-модифицированная модель Кэм-Клей (Modified Cam-Clay Model);

-модель скального грунта (Jointed Rock Model);

-модифицированная (упруго-пластическая модель с упрочнением) модель Мора-Кулона (Modified Mohr-Coulomb Model);

-нелинейная модель сваи (Pile Nonlinear Model);

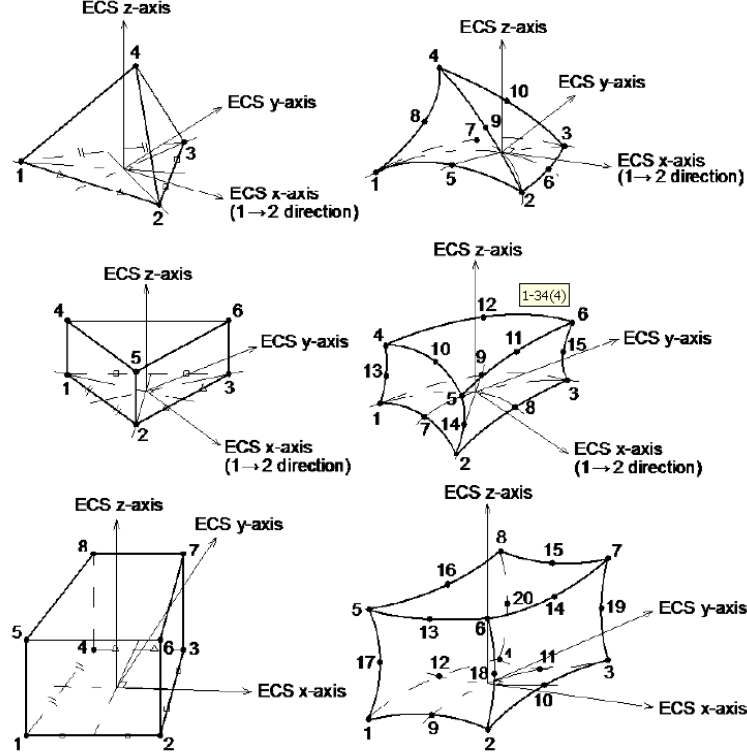
-Hoek-Brown Model, нелинейная пространственная модель разрушения скальных грунтов;

-Jardine Model, модель, сочетающая нелинейное упругое деформирование и пластическое течение без упрочнения (в соответствии с соотношениями Треска)

-D-min model, модель скального грунта с константами, изменяющимися на каждой ступени нагружения.

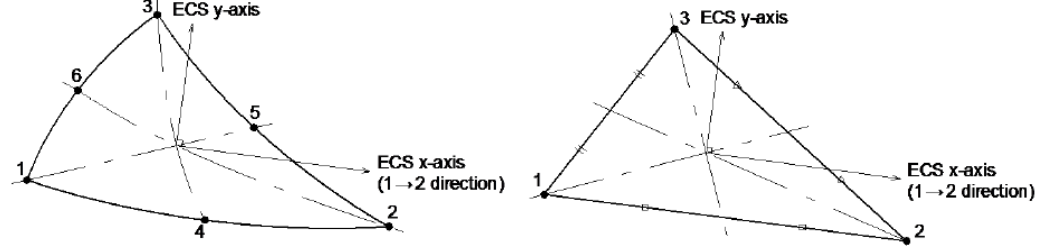
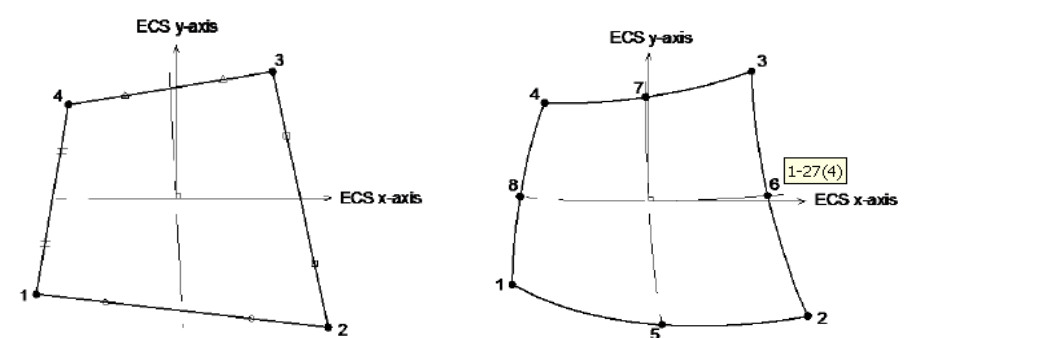
2.5 Библиотека конечных элементов

А) Трехмерные элементы для моделирования поведения грунта и массивных конструкций

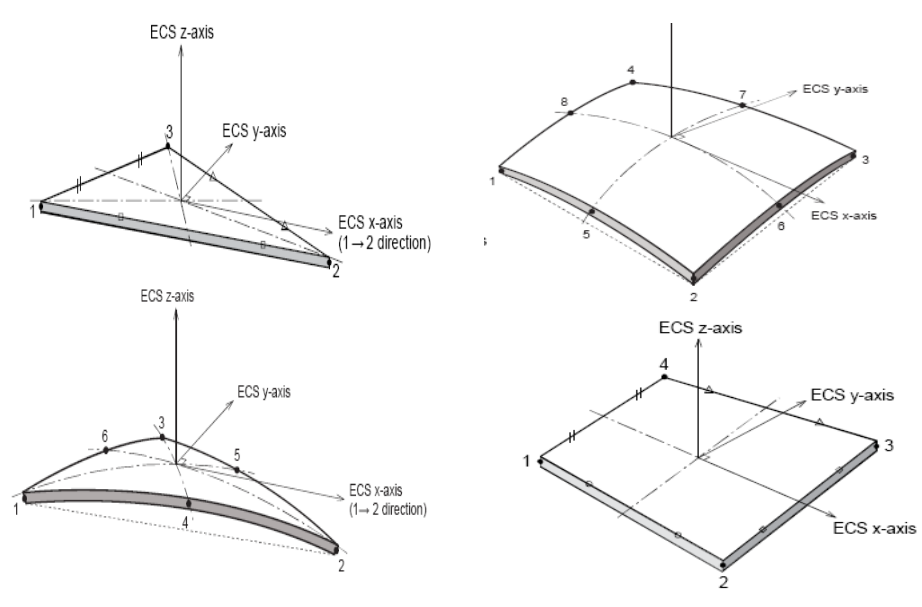
<p>4 - х узловой тетраэдр</p> <p>10 - ти узловой тетраэдр</p> <p>6- ти узловой пентаэдр</p> <p>15 - ти узловой пентаэдр</p> <p>8 - ми узловой гексаэдр</p> <p>20 - ти узловой гексаэдр</p>	 <p>(a) low order</p> <p>(b) high order</p>
--	---

Б) Двумерные элементы для моделирования поведения грунта

Элементы плоской деформации и осесимметричные элементы:

<p>3-х и 6-ти узловой треугольник</p>	
<p>4-х и 8-ми узловой четырёх угольник</p>	

В) Плоские элементы для моделирования конструкций

<p>Изгибаемый пластинчатый элемент (элемент оболочки)</p> <p>Элемент плоского напряженного состояния (балка стенка, мембрана)</p>	
---	--

Г) Стержневые элементы для моделирования конструкций

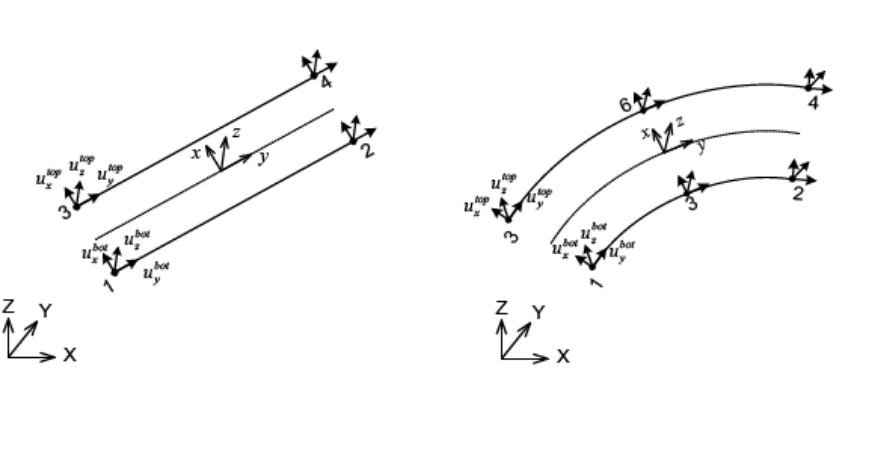
Стержневой элемент - осевое сжатие и растяжение

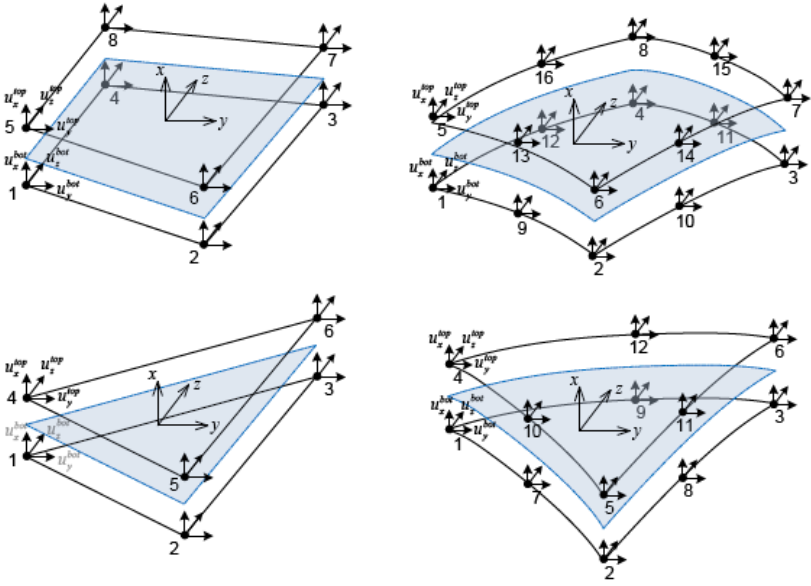
Стержневой элемент с возможностью моделирования без узлового соответствия с двух и трехмерными элементами (осевое сжатие и растяжение)

Балочный изгибаемый элемент, позволяющий учитывать осевое растяжение или сжатие, изгиб в двух плоскостях, сдвиг и кручение.

Д) Вспомогательные конечные элементы

Интерфейсные(контактные) элементы для моделирования поведения на контакте:

<p>Узлов, линий или краев (2-х, 3-х узловой в зависимости от типов элементов на контакте)</p>	
---	--

<p>Поверхностей (4-х, 8-ми, 3-х, 6-ти узловой в зависимости от типов элементов на контакте)</p>	
---	--

Элемент для моделирования свай: состоит из **балочного элемента** и объемного **интерфейсного элемента**, обеспечивающего связь боковой поверхности и торца с объемными элементами грунтового массива.

Связь конечной жесткости.

Абсолютно жесткие связи.

Односторонние упругие связи.

Связи с матричным заданием жесткостей по различным степеням свободы.

Как видно из описанного перечня возможностей, ПК обладает достаточной теоретической базой для моделирования самых различных геотехнических задач (включая строительные конструкции), возникающих в современной строительной практике.

3. Верификация

Несмотря на все многообразие расчетных возможностей, методик решения, а также различных типов конечных элементов, на данный момент в области практических геотехнических расчетов применяется лишь незначительный набор описанных возможностей.

Целью данной работы по верификации является всесторонняя оценка наиболее распространенных в российской практике расчетных моделей поведения грунта и строительных конструкций, типов решаемых задач (линейный,

нелинейный статический анализ, поэтапные расчеты и т.д.), а также методов решения этих задач (решение СЛАУ, виды нелинейных расчетов и т.д.).

В качестве основных **задач** можно выделить следующее:

- анализ теоретической базы верифицируемых возможностей ПК;
- создание базы эталонных решений задач механики грунтов, а также проектирования оснований, фундаментов и подземных сооружений (строгие аналитические решения, верифицированные численные решения, апробированные методики, экспериментальные и натурные данные);
- подготовка исходных данных для решения примеров верификации;
- решение примеров верификации и последующий анализ полученных результатов путем сравнения с эталонными решениями;
- оценка уровня использования верифицируемого ПК в мировой практике строительства;
- общая оценка ПК.

Таким образом, верификационный отчет был разделен на 4 тома:

Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации.

Том 2. Верификационные примеры из MIDAS GTS verification manual

Том 3. Верификационные примеры, предложенные экспертами и авторами отчета

Том 4. Опыт применения MIDAS GTS в проектной практике

Наиболее трудоемкой задачей среди описанных выше является создание базы эталонных (тестовых) примеров, подходящих для возможностей программного комплекса, выбранных к верификации.

4. Верифицируемые возможности

Тип задач

1. Статический расчет (Static Stress Analysis)

- Линеиный (Linear static stress analysis)
- Нелинейный упругий и упруго пластический анализ (Nonlinear elastic & elasto-plastic analysis)

2. Расчеты устойчивости

- Метод снижения прочностных характеристик (Strength reduction method)

Методы решения СЛАУ

- мульти-фронтальный

Нелинейные решатели

- Метод Ньютона-Рафсона (Newton-Raphson method)

Верифицируемые конечные элементы

А) Трехмерные элементы для моделирования поведения грунта и массивных конструкций

- 4 - х узловой тетраэдр
- 8 - ми узловой гексаэдр
- 10 - ти узловой тетраэдр
- 20 - ти узловой гексаэдр

Б) Двумерные элементы для моделирования поведения грунта

Элементы плоской деформации и осесимметричные элементы:

- 3-х узловой треугольник
- 6-ти узловой треугольник
- 4-х узловой четырех угольник
- 8-ми узловой четырех угольник

В) Двумерные элементы для моделирования конструкций

- Изгибаемый пластинчатый элемент (элемент оболочки)

Г) Одномерные элементы для моделирования конструкций

- Балочный изгибаемый элемент

Д) Интерфейсные элементы

- 1D интерфейсный элемент
- 2D интерфейсный элемент

Е) Специальные элементы

- свайный элемент
- односторонние связи

- жесткие связи

Модели материала

- линейно-упругая модель
- упруго-пластическая модель Мора-Кулона
- упруго-пластическая модель Друккера-Прагера

Ниже описана теоретическая база, заложенная в ПК, позволяющая проводить вычисления в рамках описанных возможностей.

5. Теоретические основы

Программный комплекс MIDAS GTS предназначен для расчётов при проектировании (по несущей способности и деформациям) и исследованиях оснований и геотехнических объектов. Программа MIDAS GTS реализует решение плоских (плоская деформация), пространственных и осесимметричных задач со следующими видами физической нелинейности:

- пластическое формоизменение с дилатансией;
- деформирование при растяжении без сопротивления;
- сдвиг по заданной (контактной) поверхности.

Расчётные области считаются сплошными, однородными и изотропными.

Математическая модель грунта описывается уравнениями теории упругости (линейно деформируемой среды) и теории пластичности. Процедурную основу алгоритмов, реализуемых в программе MIDAS GTS, составляет метод конечных элементов (МКЭ).

Программа позволяет моделировать «историю» возведения (образования) объекта, изменяя не только нагрузки, но также добавляя фрагменты расчётной области (stage construction).

Для задания начального НДС грунтового массива в случае применения поэтапного расчета в ПК предложено два способа:

- K_0 - процедура, где поле напряжений может формироваться по гидростатическому ($\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y$) или геостатическому закону ($\sigma_z \neq \sigma_x =$

σ_y) в зависимости от заданного пользователем коэффициента бокового давления грунта в состоянии покоя K_0 ;

- нагружение массива объемными силами собственного веса грунта, в результате чего вычисляется как поле напряжений, так и поле деформаций. Здесь боковое (горизонтальное) давление грунта определяется в процессе расчета в зависимости от коэффициента Пуассона материала (упругое состояние), а также прочностных характеристик (в точках предельного состояния, описываемого той или иной упруго-пластической моделью материала).

При этом исходное напряжённое состояние, достигнутое системой до приложения нагрузки, также может быть учтено в виде произвольных тензоров в континуальных КЭ и усилий в стержневых КЭ.

5.1 Физические условия задач. Описание расчётных моделей грунта

Используемые в программе MIDAS GTS расчётные модели основываются на следующих положениях:

- точечные фрагменты (элементарные объёмы) расчётных областей при нагружении проходят стадии допредельного (линейного деформирования) и предельного (пластического течения) напряженных состояний, описываемых физическими уравнениями теорий упругости и пластичности грунтов;
- в связи с неравномерным распределением напряжений в континууме (грунтовом массиве) имеют место оба вида (допредельное и предельное) напряженного состояния, локализирующиеся в областях с фиксируемыми расчетом границами;
- предельные состояния расчётных областей (потеря устойчивости, прогрессирующее перемещения) являются следствием развития пластических областей, линий скольжения и накопления присущих им деформаций.

На стадии линейного деформирования (до достижения предела текучести) напряжённое состояние грунта описывается уравнениями закона Гука и соотношений Коши, которые представлены в таблице 2.

Таблица 2. Соотношения Коши и уравнения закона Гука для континуальных расчётных областей

Вид напряжённого состояния	Соотношения Коши	Уравнения закона Гука
Плоская деформация	$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x};$ $\varepsilon_z = \frac{\partial V}{\partial z};$ $\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x};$	$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) - \nu\varepsilon_z];$ $\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_z(1-\nu) - \nu\varepsilon_x];$ $\tau_{xz} = \gamma_{xz} \frac{E}{2(1+\nu)}$
Осесимметрично е напряжённое состояние	$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x};$ $\varepsilon_z = \frac{\partial V}{\partial z};$ $\varepsilon_\theta = \frac{U}{x};$ $\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x}$	$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) - \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta)];$ $\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_z(1-\nu) - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta)];$ $\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_\theta(1-\nu) - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)];$ $\tau_{xz} = \gamma_{xz} \frac{E}{2(1+\nu)}$
Пространственно е напряжённое состояние	$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x};$ $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y};$ $\varepsilon_z = \frac{\partial V}{\partial z};$ $\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x};$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x};$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y};$	$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) - \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_y)];$ $\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_y(1-\nu) - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)];$ $\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_z(1-\nu) - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)];$ $\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\tau_{xz} = \gamma_{xz} \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\tau_{yz} = \gamma_{yz} \frac{E}{2(1+\nu)}$

В уравнениях таблицы 2 приняты следующие обозначения:

U, W, V – составляющие перемещений в точке по направлениям осей X, Y, Z ;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – нормальные и касательные напряжения в соответствии со схемами таблицы 1 и соответствующие им нормальные и угловые деформации;

E , ν – деформационные характеристики: модуль деформации, коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона).

Уравнения закона Гука записаны в форме (напряжения–слева, относительные деформации–справа), которая принята в математических процессах МКЭ.

Условия (пределы) текучести (пограничные состояния между линейным деформированием и пластическим течением) при сложном напряжённом состоянии (сжатии с формоизменением) элементарных объёмов грунта описывается уравнениями, которые содержатся в таблице 3.

Таблица 3

Условия (пределы) текучести при сложном напряжённом состоянии

Вид напряжённого состояния	Наименование уравнений	Вид уравнений
Плоская деформация, пространственное и осесимметричное напряжённое состояние	Условие Мора-Кулона	$\sigma_1 \frac{1-\sin\varphi}{2ccos\varphi} - \sigma_3 \frac{1+\sin\varphi}{2ccos\varphi} = 1 \quad \text{или} \quad \text{с использованием инвариантов:}$ $-\frac{1}{3}I_1\sin\varphi + \sqrt{J_2}(\cos\theta + 13\sin\theta\sin\varphi - c\cos\varphi) = 0$
	Условие Друккера-Прагера (Мизеса-Шлейхера-Боткина)	$\sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0$ $k = \frac{6ccos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)}$ $\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)}$

Примечание: сжатие считается положительным направлением напряжений.

В уравнениях таблицы 3 приняты следующие обозначения:

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $J_2 = 1/6[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ – первый инвариант тензора и второй инвариант девиатора напряжений пространственного и осесимметричного напряжённого состояния;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения в точке;

φ, c – угол внутреннего трения, удельное сцепление,

α , k – прочностные характеристики грунта в уравнении Друккера-Прагера, аналогичные φ и c .

Полное описание моделей представлено в материалах [3].

Графическая иллюстрация (двухмерная аналогия) развития напряжённо-деформированного состояния в соответствии с рассматриваемой моделью представлена на рисунке 1.

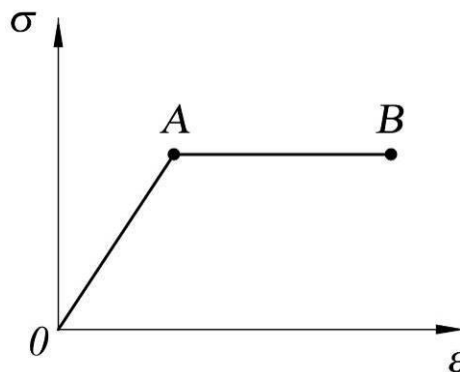


Рисунок 1. Двухмерная аналогия зависимости $\varepsilon = f(\sigma)$

Наклонный участок OA диаграммы изображает линейное деформирование грунта в соответствии с уравнениями закона Гука, точка A – предел текучести в соответствии с уравнениями таблицы 3, горизонтальный участок AB соответствует стадии пластического течения.

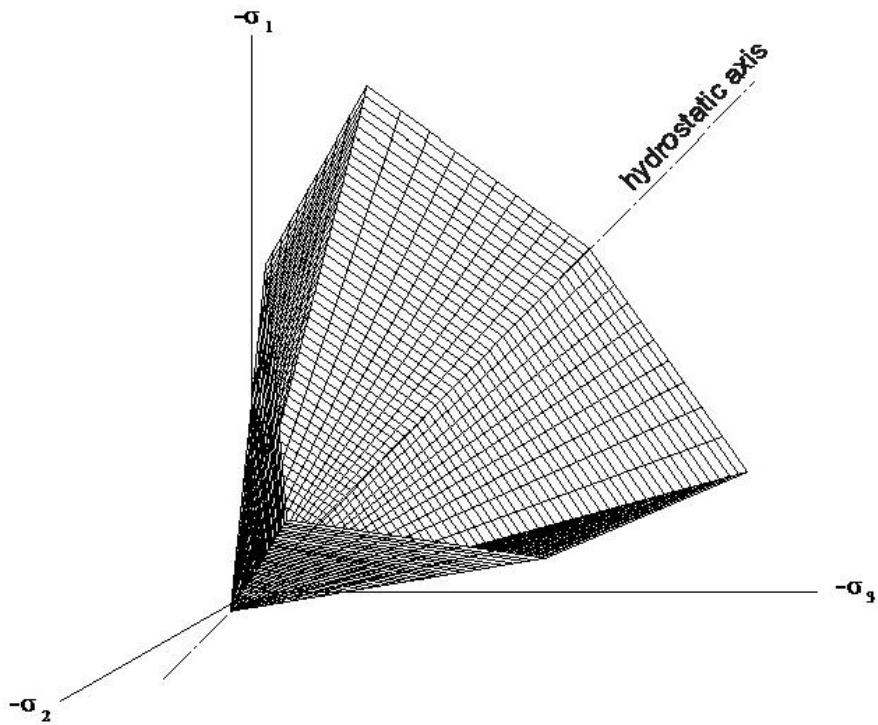
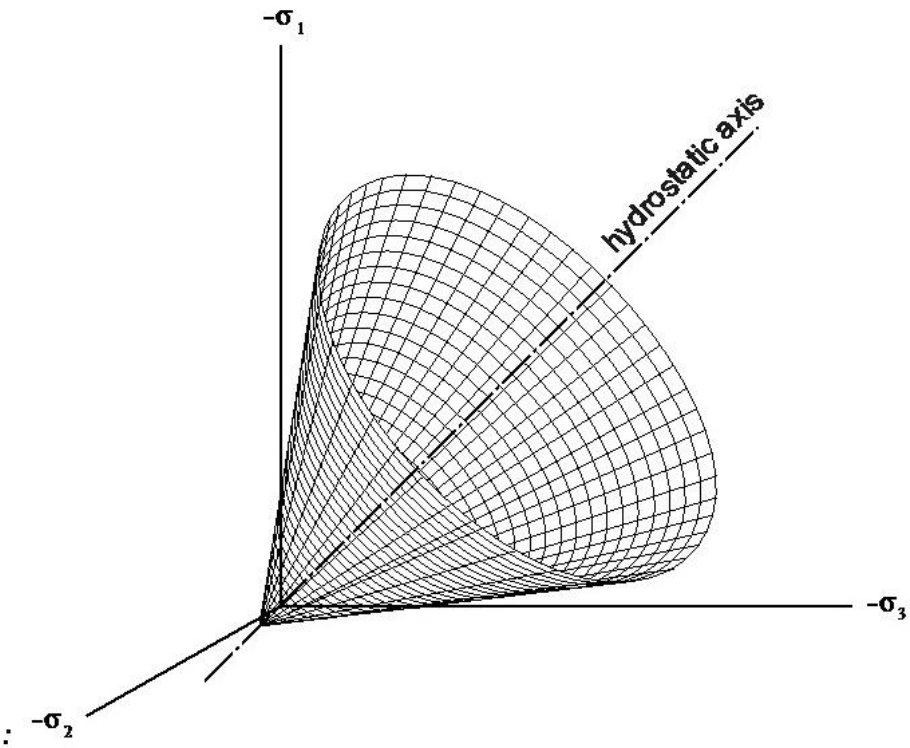
Поверхность текучести в пространстве главных напряжений для моделей Мора-Кулона и Друккера-Прагера представлена в таблице.

Главным отличием модели Мора-Кулона от модели Друккера-Прагера является то, что условие текучести не зависит от промежуточного (третьего) главного напряжения, в результате чего поверхность текучести представляет собой шестигранную пирамиду. Для модели Друккера-Прагера [36] эта поверхность переходит в конус, описываемый уравнением (таблица 3). Ось конуса совпадает с гидростатической осью главных напряжений. Авторы приняли допущение о том, что грунт на стадии пластического течения является идеально пластическим телом, обладающим свойством дилатансии. В условиях плоской деформации третье главное напряжение равно

$$\sigma_3 = -2\alpha\sqrt{I_2}$$

где α – прочностная характеристика в условии текучести, I_2 – второй инвариант девиатора напряжений. Касательные напряжения τ_{13} , τ_{23} равны нулю.

Таблица 4. Виды поверхностей текучести

<p>Поверхность текучести Мора-Кулона</p>	
<p>Поверхность текучести Друккера-Прагера</p>	

5.1.1 Упруго-пластический расчет

Продолжение деформаций расчётной области после достижения предельного напряжённого состояния (в соответствии с уравнениями таблицы 3) описываются следующими положениями и формульными зависимостями:

- общие деформации состоят из линейных - (ε^e , описываемых уравнениями закона Гука) и пластических составляющих ε^p

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p;$$
- линейные и пластические составляющие перемещений и деформаций связаны соотношениями Коши (таблица 2);
- векторы главных линейных, пластических деформаций и главных напряжений приняты соосными;
- пластические составляющие деформаций состоят из пластического формоизменения (чистый сдвиг) и объёмного деформирования (дилатансии).

Идея теории пластического течения заключается в том, что поле скоростей (или приращений) пластических деформаций формируют частные производные некоторой функции $F(\sigma_{ij})=0$ (пластического потенциала). В общем виде приращение пластических деформаций выражается следующим образом:

$$d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad (5.2.1)$$

где функция F называется пластическим потенциалом;

$\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ - характеризует направление приращения пластических деформаций (направлена перпендикулярно поверхности, определенной функцией F в пространстве напряжений σ)

λ – малая скалярная величина, определяющая величину пластических деформаций, вычисляемая в процессе расчета.

В качестве F можно принять условие текучести.

Рассмотрим простой пример. В частном случае условие текучести Мора Кулона при $\varphi=0$ переходит в условие Сен-Венана – Треска:

$$\sigma_1 \frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi} - \sigma_3 \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi} - 1 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{текучести} = 0.$$

где $\sigma_{текучести} = 2c$.

Тогда

$$d\varepsilon_{1,2} = \lambda [\partial(\sigma_1 - \sigma_2 \pm \sigma_{\text{текущести}}) / \partial \sigma_{1,2}]; \quad d\varepsilon_1 = \lambda, \quad d\varepsilon_2 = -\lambda;$$

$$d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_2;$$

Это чистый сдвиг при постоянном объёме и представляет собой ассоциированный закон течения без дилатансии.

В общем случае использования модели Мора-Кулона:

$$d\varepsilon_{1,2} = \lambda (\partial F / \partial \sigma_{1,2}) = \lambda (\pm 1 + \sin \varphi) \quad (5.2.3)$$

Это ассоциированный закон с дилатансией.

Если в уравнении Мора-Кулона заменить $\sin \varphi$ на A_* , то получим не ассоциированный закон течения с возможностью учета дилатансии, где $A_* = \sin \psi = (\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p) / (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)$ – параметр дилатансии, константа, отражающая изменение объёма при формоизменении (сдвиге) грунта в условиях плоской деформации, т.е., если параметр (угол) дилатансии в модели Мора-Кулона принять равным нулю, то получаем чистый сдвиг при постоянном объёме.

ψ – угол дилатансии (Dilatancy Angle).

Модель Друккера-Прагера реализует ассоциированный закон пластического течения с дилатансией, т.е. функция пластического потенциала совпадает с функцией текучести, где В этом случае приращение пластических деформаций будет иметь вид

$$\varepsilon_{1,2,3}^p = \lambda [A + (\sigma_{1,2,3} - \sigma_m) / 2 J_2^{1/2}]. \quad (5.2.3)$$

где $\varepsilon_{1,2,3}^p$ – главные пластические деформации;

$\sigma_{1,2,3}$ и J_2 – по-прежнему главные напряжения и второй инвариант девиатора напряжений;

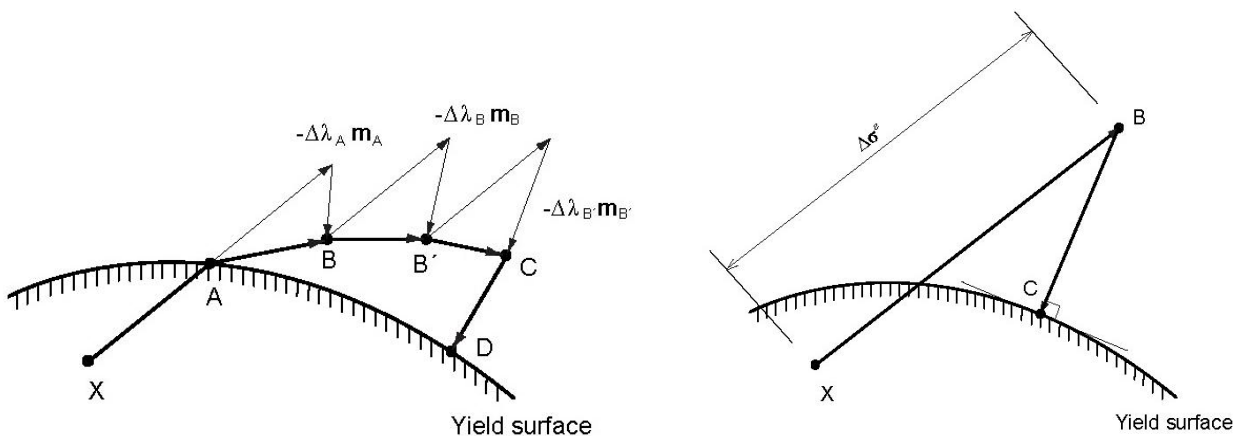
$A = \alpha$ – параметр дилатансии модели Друккера-Прагера (ассоциированный закон течения). Варьирование параметра дилатансии для данной модели невозможно.

С использованием описанных соотношений выполняется упруго-пластический расчет, который представляет собой итерационную или инкрементально-итерационную процедуру, где нелинейное решение может вычисляться различными путями (п. 2.3) и [4]. В рамках верификации рассматривается только один наиболее эффективный и распространенный метод

Ньютона-Рафсона, описан в п. 5.3.2. Алгоритм решения задачи состоит из следующих расчётов, выполняемых на каждой ступени итерации.

1. Определение исходных компонентов напряжений и деформаций, полученных в результате «упругого» решения (в начале расчёта или после добавления ступени нагрузки) или после действий предыдущей ступени итерации. Выявление на расчётной области «подобласти (или подобластей) разрушения», где полученное распределение напряжений не удовлетворяет условиям прочности (текучести) по Мору-Кулону или Друккеру-Прагеру.

2. Определение в конечных элементах «подобласти разрушения» компонентов напряжений, удовлетворяющих условиям задачи (уравнениям текучести по Мору-Кулону или Друккеру-Прагеру). Т.е. осуществляется коррекция упругого решения в «области разрушения» где с использованием явного прямого или неявного обратного алгоритма Эйлера [1] выполняется возвращение точек (в пространстве напряжений) на поверхность текучести Мора-Кулона или Друккера-Прагера. Графическая иллюстрация данной процедуры показана на рисунке 2. В результате коррекции точек в пространстве напряжений вычисляется множитель λ , осуществляется пластический шаг в соответствии уравнениями (5.2.1), (5.2.2) и (5.2.3) и вычисляются полные деформации.



а) прямой явный алгоритм

б) обратный неявный алгоритм

Рисунок 2. Коррекция напряжений в упругопластическом расчете

3. Определение вектора «невязки силы» в соответствии с МКЭ. Проверка условий текучести и сходимости итерации. Если условия сходимости выполнены, расчет прекращается, если нет, то в рамках метода Ньютона-Рафсона выполняется

перестроение матрицы жесткости (по результатам вычисления пластического шага). Возвращение к п. 1.

5.2 Анализ устойчивости грунтового массива методом снижения прочности

Данный метод основан на МКЭ и поэтому считается прямым и более точным методом оценки устойчивости [1], чем косвенные методы предельных состояний, где из всевозможных поверхностей скольжения (сдвига) определяется наиболее опасная и уже для нее считается коэффициент запаса устойчивости.

Анализ устойчивости методом снижения прочности может быть реализован после выполнения упругого или упруго-пластического расчета КЭ модели, после которого известно НДС в некоторой точке каждого конечного элемента грунтового массива. НДС грунтового массива может быть получено с использованием разных моделей грунта, однако последующий расчет устойчивости в MIDAS GTS реализован только для модели Мора-Кулона.

Отталкиваясь от исходного НДС при постоянном модуле деформации (E) и коэффициенте Пуассона (ν) производится по шаговое снижение входных параметров прочности (c , ϕ), причем снижение производится одновременно (пропорционально) для каждого параметра. Тогда на каждом шаге анализируется сходимость процесса упруго-пластического решения. Разрушение всего массива произойдет когда процесс решения начнет расходиться т.е. равновесие в системе более не сможет достигаться. Исходя из данных условий достигнутая величина снижения прочности на последнем шаге будет означать, что грунтовый массив в целом находится в состоянии предельного равновесия при данных сниженных прочностных характеристиках. При этом НДС полученное на заключительном этапе по сути лишено физического смысла, однако поле перемещений и поле разрыва скоростей деформаций отражает наиболее вероятный механизм разрушения массива.

В результате расчета минимальный коэффициент запаса устойчивости определяется следующим образом:

$$K_s = \frac{\tau}{\tau_f} \quad (5.2.4)$$

где τ - сопротивление материала сдвигу и вычисляется по теории прочности Мора-Кулона:

$$\tau = c + \sigma_n \tan(\varphi) \quad (5.2.5)$$

τ_f - сдвиговое напряжение на поверхности скольжения, когда наступило предельное равновесие со сниженными c и φ :

$$\tau_f = c_f + \sigma_n \tan(\varphi_f) \quad (5.2.6)$$

где

$c_f = \frac{c}{SRF}$ - сниженное сцепление;

$\varphi_f = \frac{\varphi}{SRF}$ - сниженный угол внутреннего трения;

SRF - коэффициент снижения прочности.

5.3 Методы решения

5.3.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система разрешающих уравнений МКЭ может быть записана в матричном виде:

$$Ku = p, \quad (5.3.1)$$

где K – матрица жесткости, а p – вектор внешних нагрузок.

Необходимо найти компоненты вектора перемещений u , удовлетворяющие данному уравнению.

Уравнение (5.3.1) используется при решении практически любых расчетных задач, включая линейный анализ, расчет на собственные значения/потерю устойчивости, динамические и нелинейные задачи. Методы решения этого уравнения делятся на прямые и итерационные. В MIDAS GTS используются следующие методы решения системы уравнений МКЭ:

Прямые методы:

- Профильный метод (при профильном хранении матриц)
- **Мультифронтальный** (используется по умолчанию)

Итерационные методы:

– Метод сопряженных градиентов (используется по умолчанию).

Предобуславливание: неполное LU разложение (используется по умолчанию), Якоби

– Обобщенный метод минимальных невязок. Предобуславливание: неполное LU разложение (используется по умолчанию), Якоби

Прямой метод

Прямой метод состоит из двух основных операций. Первая операция – разложение матрицы, а вторая – прямая или обратная подстановка.

Симметричная матрица жесткости K раскладывается на:

$$LL^T u = p \text{ или } LDL^T u = p. \quad (5.3.2)$$

Здесь L – нижняя треугольная матрица, а D – диагональная матрица. В общем случае, разложение с использованием матрицы D необходимо для матриц, не являющихся положительно определенными. Разложенная матрица $K (= LL^T$ или $= LDL^T)$ используется для нахождения решения путем прямой и обратной подстановки. Подставляя ее в $v = L^T u$ или $v = DL^T u$, можем записать:

$$Lv = p, \quad (5.3.3)$$

Решение $Lv = p$ (вектор v) может быть выражено через нижнюю треугольную матрицу. После получения v возможно найти u , используя уравнение $v = L^T u$ или $v = DL^T u$. При использовании прямых методов важно правильно использовать разреженность матрицы. Обычно, при решении системы МКЭ, матрица K является разреженной. В зависимости от учета разреженности, изменяется объем памяти, требуемый для хранения этой матрицы.

В MIDAS реализован решатель, хранящий матрицы в профильном виде, а также мультифронтальный решатель, использующий мультифронтальные матрицы.

Мультифронтальный решатель

Мультифронтальный решатель основан на таком разложении матрицы, когда несколько фронтальных матриц (по количеству элементов) рассматриваются

одновременно. Матрица жесткости для сетки представленной на рисунке имеет вид (5.3.4).

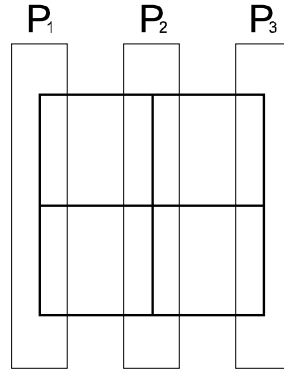


Рисунок 3. Обычная сетка для трех тел

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{21}^T \\ 0 & K_{33} & K_{23}^T \\ K_{21} & K_{23} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.3.4)$$

Если K раскладывается в виде $(P_1, P_3) \rightarrow P_2$, ее можно представить в виде (5.3.5) и (5.3.6).

$$\begin{aligned} K_{11} &= L_{11} L_{11}^T \\ L_{21} L_{11}^T &= K_{21} \\ K_{22} - L_{21} L_{21}^T &= K_{22}^*, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned} K_{33} &= L_{33} L_{33}^T \\ L_{23} L_{33}^T &= K_{23} \\ K_{22}^* - L_{23} L_{23}^T &= K_{22}^{**}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Следует учесть, что разложение матрицы в мультифронтальном методе требует перенумерации степеней свободы. На рисунке 4 схематично показан алгоритм разложения для прямоугольной сетки. Метод половинного деления используется в качестве алгоритма перенумерации степеней свободы. Прямая подстановка выполняется в той же последовательности, что и разложение матрицы, а обратная подстановка выполняется в обратном порядке.

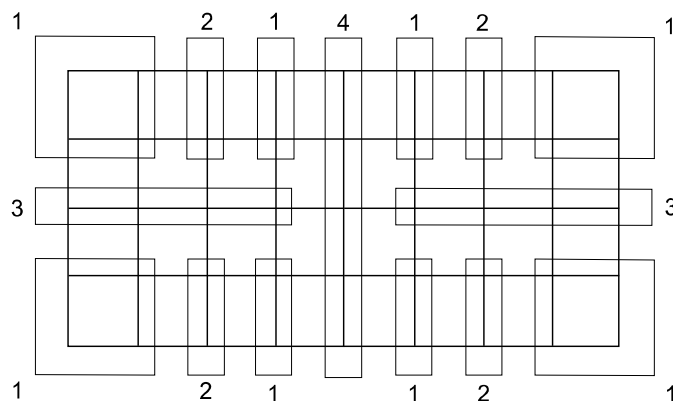


Рисунок 4. Стандартная последовательность разложения матрицы для мультифронтального решателя

5.3.2 Получение нелинейного решения

Если свойства материала не линейны (физическая нелинейность), получить решение линейными методами нельзя – используются итерационные методы, позволяющие получать корректные решения. В нелинейном анализе перемещения вычисляются как сумма приращений (инкрементов) перемещений, полученных за каждую итерацию.

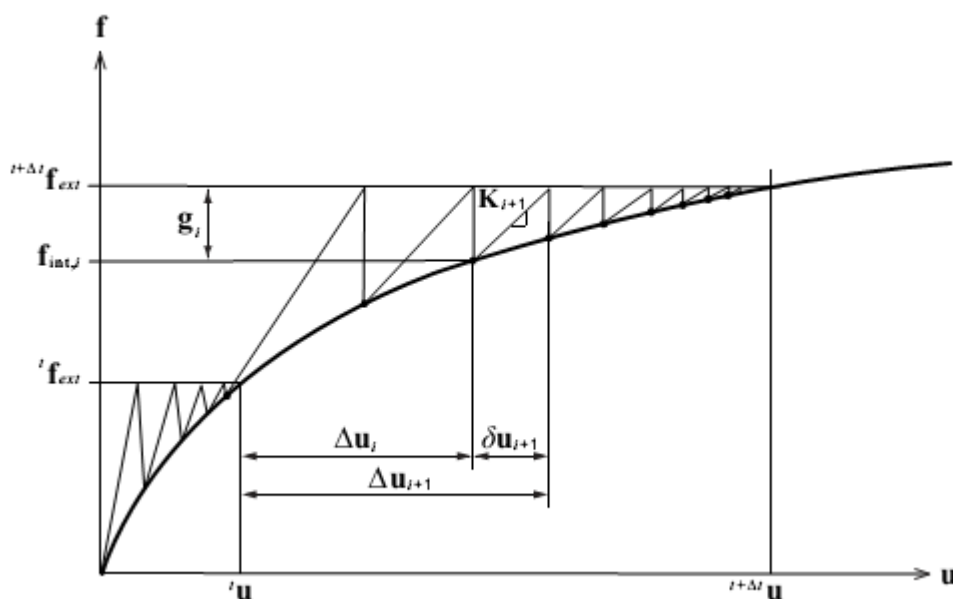


Рисунок 5. Итерационный процесс

На рисунке 5 показан итерационный процесс: где f_{ext}^t и $f_{ext}^{t+\Delta t}$ – внешняя нагрузка в момент времени t и $t + \Delta t$ соответственно. Взаимосвязь перемещений и их приращений в промежуток времени между t и $t + \Delta t$ описывается выражением:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (5.3.7)$$

где $\Delta\mathbf{u}$ – полные перемещения за временной интервал Δt .

Итерационный процесс при шаге по времени Δt имеет вид:

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i \quad or \quad \Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_{i+1} \quad (5.3.8)$$

где $\Delta \mathbf{u}_i$ – сумма приращений перемещений за i -ую итерацию

$\delta \mathbf{u}_i$ – приращение перемещений за $i + 1$ итерацию.

Приращение перемещения $\delta \mathbf{u}_i$ определяется СЛАУ с матрицей тангенциальной жесткости \mathbf{K}_{i+1} :

$$\delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{K}_{i+1}^{-1} \mathbf{g}_i \quad (5.3.9)$$

где \mathbf{g}_i – неуравновешенная сила для i -ой итерации.

Неуравновешенная сила \mathbf{g}_i определяется выражением:

$$\mathbf{g}_i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,i} \quad (5.3.10)$$

Полное приращение перемещения $\Delta \mathbf{u}$ на временном интервале от t до $t + \Delta t$ является полным перемещением от внешней силы ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}$, где $\mathbf{f}_{int,i}$ – внутреннее усилие, зависящее от процесса приложения нагрузки. Поэтому, деформация элемента вычисляется через перемещения, накопленные за время t , сходимость процесса объявляется в момент $t + \Delta t$. Итерационный процесс обрывается при достижении заданной точности.

Итерационные методы, доступные в MIDAS GTS:

- ✓ Метод постоянных жесткостей
- ✓ Метод секущих жесткостей
- ✓ **Метод Ньютона-Рафсона**
- ✓ Модифицированный метод Ньютона-Рафсона

По отношению к увеличению нагрузки возможно использование следующих опций:

- ✓ Равновеликий шаг по нагрузке
- ✓ Шаг по нагрузке, определяемый пользователем
- ✓ Автоматическое вычисление шага по нагрузке
- ✓ Метод длины дуги

Также возможно использование *метода ускорения сходимости* при различных критериях сходимости.

Метод Ньютона-Рафсона

Метод Ньютона-Рафсона заключается в использовании переменной тангенциальной жесткости на каждой итерации, как показано на рисунке 6. Скорость сходимости метода достаточно высока, так что сходимость может наблюдаться даже при небольшом количестве итераций.

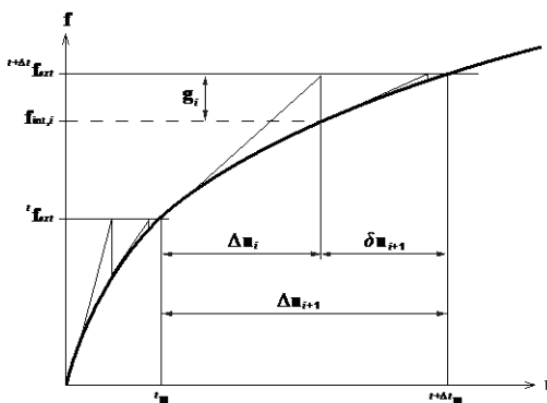


Рисунок 6. Итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона

Если рассчитываемая модель достаточно велика, то вычисление тангенциальной жесткости является достаточно трудоемкой операцией. Если решения, полученные на первой и последней итерациях сильно отличаются, то решение может не сойтись. Несмотря на то, что число итераций, необходимое для сходимости невелико, вычислительные затраты на одну итерацию больше, чем при методе начальных (постоянных) жесткостей или модифицированном методе Ньютона-Рафсона. В методе Ньютона-Рафсона жесткость является касательной к графику зависимости перемещений от нагрузки, она пересчитывается на каждом шаге расчета. Процесс пересчета показан на рисунке 7. Данный метод не применим для разупрочняющихся материалов, вместо него следует использовать метод постоянных жесткостей. В MIDAS GTS коэффициент запаса прочности всегда вычисляется для упругой стадии работы для обеспечения вычислительной стабильности.

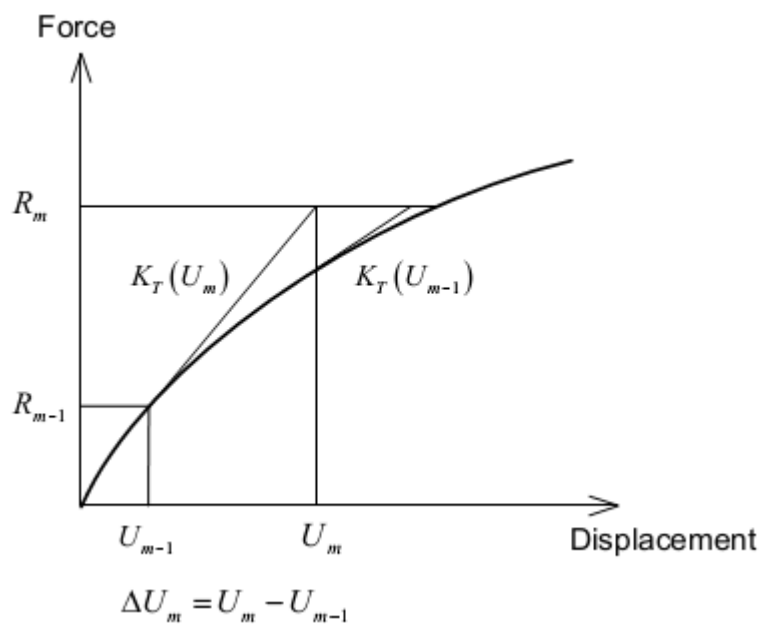


Рисунок 7. Метод Ньютона-Рафсона

Метод ускорения сходимости

Метод ускорения сходимости доступен для следующих методов решения: метод постоянных жесткостей, метод секущих жесткостей, **метод Ньютона-Рафсона** и модифицированный метод Ньютона-Рафсона.

Он позволяет ускорять сходимость при помощи оптимизации перемещений путем минимизации полной потенциальной энергии. Теоретическое обоснование метода изложим на примере метода Ньютона-Рафсона. Приращение перемещений представим в виде (5.3.11):

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{g} \quad (5.3.11)$$

где, \mathbf{K}_T – матрица тангенциальной жесткости, вычисленная на предыдущей итерации;

\mathbf{g} - вектор неуравновешенных сил;

Пересчитанное перемещение:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_o + \eta \delta \mathbf{u} \quad (5.3.12)$$

где, u_n - пересчитанное перемещение;

u_o - перемещение, полученное на предыдущей итерации;

Величина η является фиксированной, если метод ускорения сходимости не используется. При его использовании, параметр η позволяет регулировать размер шага. Полная потенциальная энергия ϕ определяется выражением:

$$\begin{aligned}\phi_n(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) &= \phi_o(\mathbf{u}) + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{u}^T \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{u}^2}\delta\mathbf{u} + \dots \\ &= \phi_o(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u})^T \delta\mathbf{u} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_T(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} + \dots\end{aligned}\quad (5.3.13)$$

где дифференциал потенциальной энергии в перемещениях равен вектору внешних нагрузок \mathbf{g} . Для нахождения условия минимизации полной потенциальной энергии для любого значения η , перепишем (5.3.13) в виде:

$$\begin{aligned}\phi_n(\eta + \delta\eta) &= \phi_o(\eta) + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\delta\eta + \dots = \phi_o + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{u}} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \delta\eta + \dots \\ &= \phi_o + (\mathbf{g}(\eta)^T \delta\mathbf{u})\delta\eta + \dots\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

Для обеспечения устойчивости решения требуется:

$$s(\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g}(\eta) = 0 \quad (5.3.15)$$

где \mathbf{u}_o и $\delta\mathbf{u}$ – фиксированные величины, следовательно, \mathbf{g} является функцией η . Скалярная величина s для начального состояния определяется выражением:

$$\begin{aligned}s_0 &= s(\eta = 0) = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g}(\eta = 0) = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g}_0 \\ &= -\mathbf{g}_0^T \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{g}_0 = -\delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_T \delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (5.3.16)$$

В стационарных условиях K_T – положительная величина, s_0 – отрицательная. Следовательно, идея точного метода ускорения сходимости состоит в нахождении минимального положительного значения η , минимизирующее $s(\eta)$ до нуля. Однако, применять точный метод ускорения сходимости неэффективно, поэтому применяют приближенный метод, задаваясь условием того, что $s(\eta)$ меньше s_0 .

$$r(\eta) = \left| \frac{s(\eta)}{s_0} \right| < 0.8 \quad (5.3.17)$$

Расчет будет закончен, если данное условие будет удовлетворено.

5.4 Библиотека конечных элементов (КЭ)

5.4.1 Объемные (трехмерные) элементы

Объемные (трехмерные) элементы могут иметь линейную или квадратичную функцию формы.

КЭ с линейной функцией формы:

- 8-узловой шестигранник
- 6-узловой пятигранник
- 4-узловой тетраэдр

КЭ с квадратичной функцией формы:

- 20-узловой шестигранник
- 15-узловой пятигранник
- 10-узловой тетраэдр

При использовании шестигранных элементов с линейной функцией формы обычно удается получить более точные результаты для напряжений и деформаций, чем при использовании тетраэдров или пятигранников с линейными функциями формы. Поэтому следует строить более мелкую сетку из гексаэдров с линейной или квадратичной функцией формы в тех частях модели, где требуются более точные результаты.

Трехмерные пространственные элементы задаются при помощи 4, 5 или 6 плоскостей. Обычно они используются для моделирования массива грунта или толстых пластин; кроме того, возможно использовать элементы высокого порядка с промежуточными узлами. Трехмерные элементы можно использовать в сочетании со стержневыми, балочными, пластинчатыми, моделирующими объекты в условиях плоского напряженного состояния, интерфейсными, упругими связевыми и упругими связующими элементами; они могут иметь форму тетраэдра, клина, и шестигранника, при этом возможно ограничивать три перемещения (степени свободы) по трем направлениям. При использовании шестигранных элементов, возможно получить весьма точные результаты как для перемещений, так и для напряжений. Напротив, клиновидные и тетраэдральные элементы позволяют получить достаточно точные результаты для перемещений, а

результаты для напряжений являются неточными. Поэтому, рекомендуется избегать использования клиновидных и тетраэдральных элементов, если требуется высокая точность расчета. Клиновидные и тетраэдральные элементы следует использовать для соединения шестигранных элементов в местах изменения их размера.

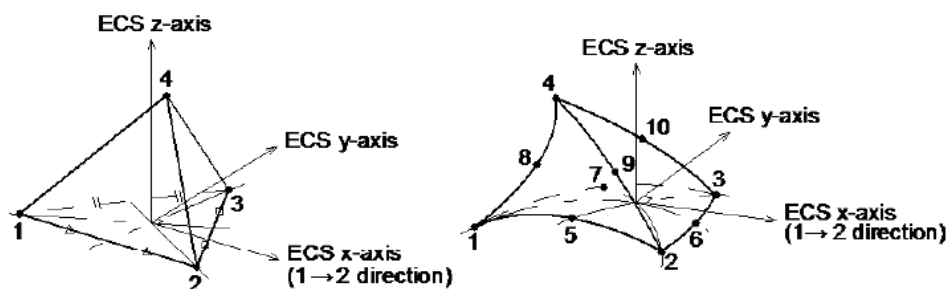
Трехмерные элементы не имеют жесткости или вращательных степеней свободы в общих узлах. При задании этих степеней свободы в решателе, наличие соседних элементов, не имеющих жесткости на кручение, приведет к ошибке. В этом случае MIDAS GTS автоматически ограничивает вращательные степени свободы для предотвращения появления ошибок в соответствующих узлах.

В нелинейном расчете стадии возведения сооружения эти степени свободы не определяются. При соединении трехмерных элементов с другими, ограничивающими вращательные степени свободы, такими как балочные и пластинчатые элементы, следует вводить жесткие вставки (функция задания главного и подчиненного узлов, используемая в MIDAS GTS) или жесткие балочные элементы, что позволит сочетать эти элементы в одной модели

Соотношение размеров сторон КЭ зависит от нескольких факторов, таких как вид элемента, геометрия, сечение и др. Для обеспечения точности более важную роль играет соотношение углов. Для шестигранника с соотношением сторон до 100% точные результаты можно получить при углах, близких к 90 градусам.

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

Трехмерные элементы имеют три поступательные степени свободы в каждом узле и не имеют вращательных степеней свободы. Нумерация узлов показана на рисунок 8.



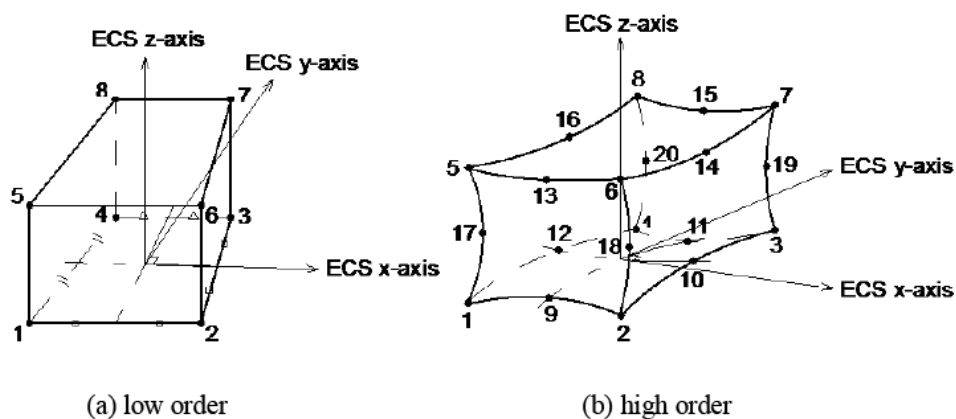


Рисунок 8. Система координат для трехмерных элементов

Свойства элементов

Для трехмерных элементов требуется задать только параметры материала. Для балочных или пластинчатых КЭ (см. далее) требуется задавать не только свойства материала, но и геометрические характеристики: характеристики сечения балок и толщины пластин.

Свойства материалов для элементов грунта и конструкций могут быть получены в результате экспериментов, измерений или имеющегося опыта расчета. Тщательная подборка свойств материалов является важным условием для повышения точности решения.

При моделировании грунта трехмерными элементами следует задавать следующие упругие характеристики материала:

Модуль упругости	E
Коэффициент Пуассона	ν
Плотность	γ_t
Плотность в водонасыщенном состоянии	γ_{sat}
Начальное напряжение	K_0
Коэффициент температурного расширения	α

Кроме того, в MIDAS GTS возможно учесть все доступные нелинейные параметры материала. В общем случае, взаимосвязь напряжений и деформаций имеет вид:

$$\sigma = D\epsilon \quad (5.4.1)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right\}^T, \boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T$$

Матрица D характеризует взаимосвязь тензоров напряжений и деформаций для изотропного линейного упругого материала имеет вид:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

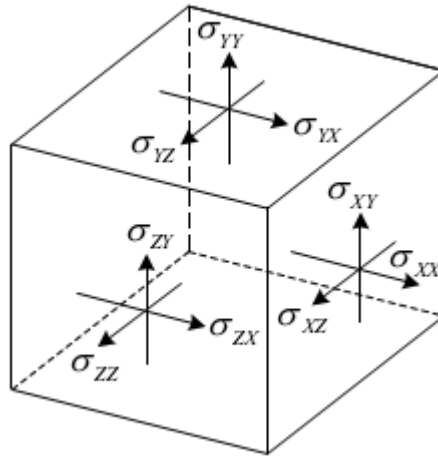


Рисунок 9. 6 компонент напряжений элемента единичного объема

КЭ-формулировка

Трехмерные элементы рассматриваются в изопараметрической постановке, теория несовместных мод (форм) используется для 8-узлового шестигранника и 6-узлового пятигранника. Трехмерные элементы имеют только поступательные перемещения u , v и w по осям x , y и z местной системы координат.

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T \quad (5.4.3)$$

Для всех трехмерных элементов вычисление матрицы жесткости происходит одинаково, за исключением элементов, использующих теорию несовместных мод.

В этом разделе N - функция формы, характеризующая количество узлов в элементе.

Для элемента координаты x , y , и z , а также перемещения u , v , и w можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n N_i x_i, & y &= \sum_{i=1}^n N_i y_i, & z &= \sum_{i=1}^n N_i z_i \\ u &= \sum_{i=1}^n N_i u_i, & v &= \sum_{i=1}^n N_i v_i, & w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Интегрирование осуществляется методом Гаусса.

Таблица 5. Число точек интегрирования для трехмерных элементов

Вид элемента:	Число точек интегрирования
4-узловой тетраэдр	1
6-узловой клин	6
8-узловой «кирпичик»	8
10-узловой тетраэдр	4
15-узловой клин	9
20-узловой «кирпичик»	27

5.4.2 КЭ плоского деформированного состояния

В midas GTS плоская деформация может моделироваться треугольными и четырехугольными элементами с тремя, четырьмя, шестью или восьмью узлами только для плоских моделей. Элементы, моделирующие плоскую деформацию, могут применяться для расчета протяженных объектов постоянного сечения, таких как дамбы и туннели. Для этого рассматривают элемент единичной толщины. Составляющие напряжения в направлении толщины (Y), могут быть получены при помощи коэффициента Пуассона (см. рис. 10).

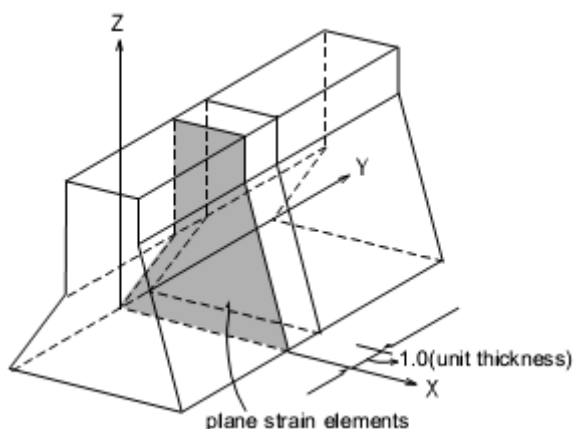


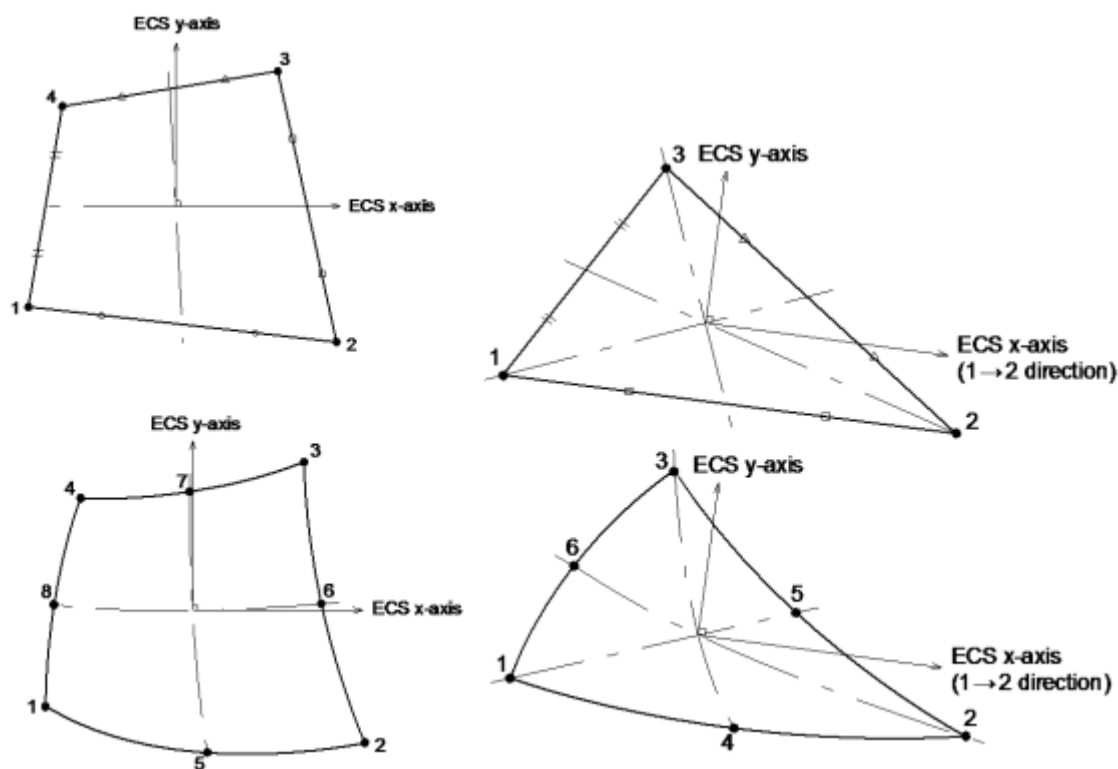
Рисунок 10. Толщина элемента, моделирующего плоское деформированное состояние.

Элементы, моделирующие плоское напряженное, состояние применяются только для вычисления напряжений в их плоскости и могут быть использованы как в статическом (линейном и нелинейном), так и в динамическом анализе.

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

Результаты расчета для КЭ, моделирующих плоское деформированное состояние, включают значения напряжений и деформаций в узлах элементов в глобальной системе координат. Следует учитывать, что при использовании элементов высокого и низкого порядков результаты будут похожи из-за того, что характеристики элементов основания связаны с глобальной системой координат.

Направления осей местной системы координат для четырехугольного и треугольного элементов показаны на рис. 11, ось X местной оси координат направлена параллельно линии, соединяющей узлы 1 и 2. В случае четырехугольного элемента, ось X - линия пересечения частей элемента с узлами 1-4 и 2-3.



(a) Четырехугольный элемент

(b) Треугольный элемент

Рисунок 11. Конфигурация элементов, моделирующих плоскую деформацию, локальная система координат и узловые внутренние усилия

Восполнение на КЭ выполняется по линейной или квадратичной интерполяции. 3-узловой треугольный и 4-узловой четырехугольный элементы используют линейную интерполяцию. 6-узловой четырехугольный и 8-узловой четырехугольный элементы используют квадратичную интерполяцию. Обычно при использовании 4-узлового четырехугольного элемента удастся получить достаточно точные результаты как для перемещений, так и для напряжений, в то время, как при использовании 3-узлового треугольного элемента часто получают неточные результаты для напряжений (результаты для деформаций в данном случае удовлетворительны). Поэтому, использовать 3-узловой треугольный элемент в зонах, где необходима высокая точность расчета, не следует. В таком случае говорят о треугольном элементе с постоянной деформацией. В элементах, моделирующих плоское деформированное состояние, не происходит деформаций из плоскости, однако, они позволяют вычислять напряжения σ_{zz} .

Следует учитывать, что нумерация узлов осуществляется против часовой стрелки как для элементов низкого порядка, так и для элементов высокого

порядка. Для элементов высокого порядка, сначала присваиваются номера узлам, соответствующим элементу более низкого порядка, нумерация продолжается узлом, находящимся между двумя первыми узлами элемента более низкого порядка.

Элементы, моделирующие плоское деформированное состояние, могут применяться только в плоских задачах, с рабочей плоскостью X-Y.

Свойства элементов

В линейных упругих моделях, элементы, моделирующие плоское напряженное состояние грунта поддерживают следующие параметры материала:

Модуль упругости	E
Коэффициент Пуассона	ν
Плотность	γ_t
Плотность в водонасыщенном состоянии	γ_{sat}
Начальное напряжение	K_0
Коэффициент температурного расширения	α

Кроме того, в midas GTS для двумерных элементов грунта, моделирующих плоское деформированное состояние, поддерживаются все доступные нелинейные свойства материалов.

Для изотропного линейного упругого материала в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.4.5)$$

Следует учитывать допущение о том, что 2-мерные элементы конструкций в плоскости X-Y имеют единичную толщину.

КЭ-формулировка

КЭ рассматриваются в изопараметрической постановке, для 4-узлового четырехугольного элемента используется теория несовместных мод. Постановка аналогична постановке для трехмерных элементов.

Уравнение плоской деформации:

$$t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} = b t \int_A \mathbf{N}^T dA + p t \int_L \mathbf{N}^T dL + \mathbf{p}_n \quad (5.4.6)$$

где L - длина границы элемента;

t - 1.0 (единичная толщина);

B - матрица, связывающая деформации и перемещения;

p - узловая сила.

Интегрирование матрицы жесткости производится по методу Гаусса.

Таблица 6. Число точек интегрирования для КЭ плоского деформированного состояния

Вид элемента	Число точек интегрирования
3-узловой треугольный	1
4-узловой четырехугольный	4
6-узловой треугольный	3
8-узловой четырехугольный	9

5.4.3 Двумерные осесимметричные КЭ

Двумерные осесимметричные элементы используются для моделирования конструкций, обладающих осевой симметрией геометрии, свойств материала и нагрузки. В качестве примера таких конструкций можно привести глубокую скважину, круговой фундамент и круговой туннель. Эти элементы задаются в изопараметрической постановке.

Осесимметричные элементы нельзя использовать с элементами других видов. Они применимы только в линейном и нелинейном статическом расчете из-за параметров, поддерживаемых элементами.

Двумерные осесимметричные элементы получают из трехмерных путем учета осевой симметрии. Ось Y глобальной системы координат является осью вращения в случае рассмотрения плоскости e . Элементы должны лежать в глобальной плоскости X - Y , справа от глобальной оси Y . В этом случае радиальное направление совпадает с глобальной осью X . Таким образом все элементы имеют положительные координаты по оси X ($X \geq 0$).

Ширина элементов задается по умолчанию равной единицы (1.0 радиан), как это показано на рисунок 12. Так как постановка элемента основана на свойствах симметрии, принимается допущение о равенности нулю окружных перемещений, деформаций сдвига γ_{XZ} (γ_{RZ}), γ_{YZ} и сдвиговых напряжений τ_{XZ} (τ_{RZ}), τ_{YZ} .

Как и для КЭ плоского деформированного состояния, предпочтительнее использовать четырехугольные элементы, чем треугольные, с отношением сторон близким к единице.

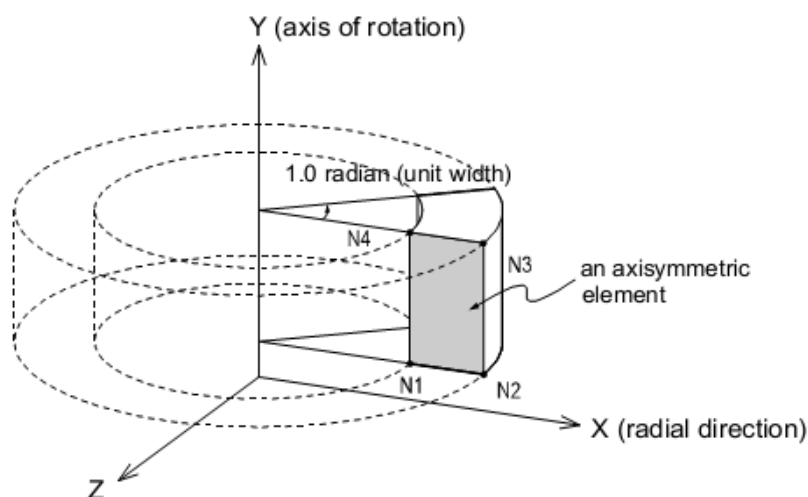
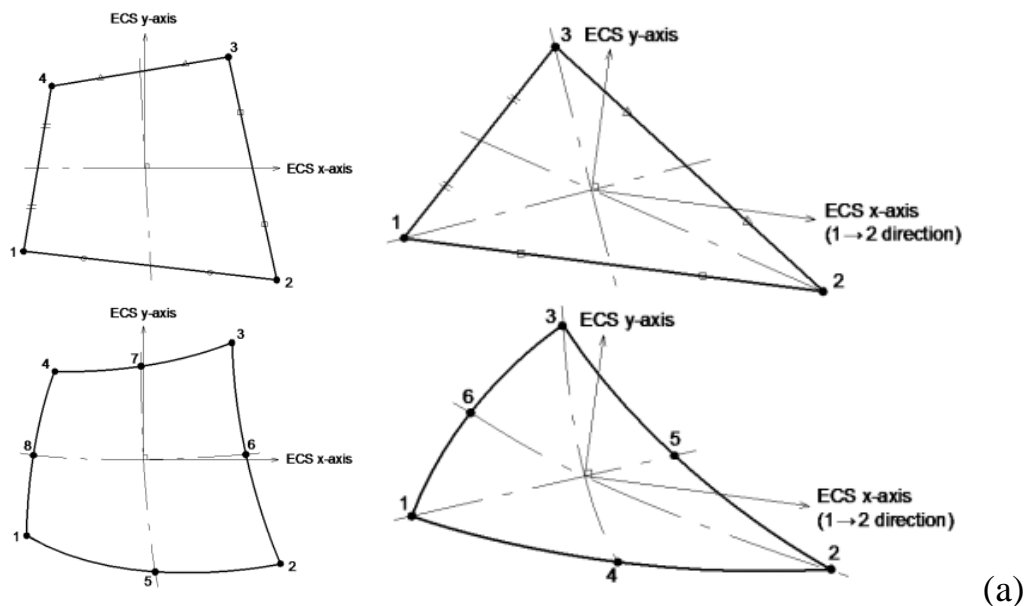


Рисунок 12. Единичная ширина осесимметричного элемента

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

Для осесимметричных элементов глобальная система координат принимается прямоугольной. Нумерация элементов и узлов осуществляется по правилам, показанным на рисунок 13. Локальная система координат строится только в выбранной плоскости для перемещений по 2 направлениям.



Четырехугольные элемент

(b) Треугольный элемент

Рисунок 13. Форма, нумерация узлов, локальная система координат для осесимметричных КЭ

Свойства элементов

Осесимметричные элементы грунта поддерживают линейные упругие свойства материала. Они характеризуются следующими параметрами:

Модуль упругости	E
Коэффициент Пуассона	ν
Плотность	γ_t
Плотность в водонасыщенном состоянии	γ_{sat}
Начальное напряжение	K_0
Коэффициент температурного расширения	α

Осесимметричный КЭ – двумерный элемент, позволяет применять все нелинейные модели грунтов, доступные в MIDAS GTS.

Обычно элемент используется для моделирования осесимметричных круговых тел. Вследствие двумерной работы элемента, деформация в направлении вращения, сдвиговые деформации и напряжения принимаются равными нулю. Система уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{RR} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{RY} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{RR} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = 0 \\ \gamma_{RY} \end{Bmatrix} \quad (5.4.7)$$

Осесимметричные элементы задаются в плоскости X-Y, при этом имеют ширину, равную 1.0 радиан.

КЭ-формулировка

Осесимметричные элементы задаются в изопараметрической постановке. «Толщиной» является окружная длина элемента для 1 радиана. Поэтому, элемент описывается уравнением:

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} R dA = b \int_A \mathbf{N}^T R dA + p \int_L \mathbf{N}^T R dL + \mathbf{p}_n \quad (5.4.8)$$

где R - радиус.

Интегрирование матрицы жесткости производится по методу Гаусса.

Таблица 7 Число точек интегрирования для осесимметричных элементов

Вид элемента	Число точек интегрирования
3-узловой треугольный	1
4-узловой четырехугольный	4
6-узловой треугольный	3
8-узловой четырехугольный	9

Функция формы в (5.4.8) такая же как и в (5.4.6) для элементов, моделирующих плоское напряженное состояние. В MIDAS GTS функция формы осесимметричных элементов либо линейная, либо квадратичная. 3-узловой треугольный 4-узловой четырехугольный элементы имеют линейную функцию формы, 6-узловой треугольный и 8-узловой четырехугольный элементы имеют квадратичную функцию формы.

Осесимметричный элемент описывается выражением:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{RR} \\ \varepsilon_{YY} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{RY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ u/R \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (5.4.9)$$

Матрица, связывающая деформации и перемещения:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{np}}{\partial y} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \dots & \frac{N_{np}}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{np}}{\partial y} & \frac{\partial N_{np}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.4.10)$$

5.4.4 Балочные КЭ

Балочные КЭ – линейные 2-х узловые элементы, могут работать на растяжение, сжатие, изгиб, сдвиг и кручение. Если изгиба, сдвига или кручения не происходит, можно использовать обыкновенный линейный элемент. Балочными элементами можно моделировать тела, имеющие большую протяженность по сравнению с размерами сечения. Если отношение размера сечения к длине больше 1/5, рекомендуется использовать пластинчатые или трехмерные объемные элементы, потому что сдвиговые деформации в балочном элементе вычисляются весьма точно. Балочные элементы могут использоваться как в статическом (линейном и нелинейном), так и в динамическом анализе, они учитывают осевые деформации, изгиб, кручение и сдвиг. Крутильная жесткость балочного элемента зависит от полярного момента инерции сечения (они равны для круговых и кольцевых сечений). Следует особо внимательно анализировать результаты при наличии больших деформаций кручения, так как крутильная жесткость обычно определяется экспериментальными методами. При соединении элементов с различным количеством степеней свободы используют жесткие вставки из балочных элементов. Жесткость вставки обычно задают в 105-108 раз больше жесткости соединяемых элементов.

Форма КЭ, Совместимость, степени свободы

Балочный элемент имеет три поступательных и три вращательных степени свободы в каждом узле, не зависимо от того, в какой системе координат рассматривается элемент. Для 2-узлового балочного элемента, местная ось X направлена по линии, соединяющей 1-ый и 2-ой узлы; ось Z параллельна направлению глобальной оси Z ; направление оси Y определяется по правилу правой руки. Если ось X местной системы координат направлена параллельно глобальной оси Z , ось Y направлена параллельно глобальной оси Y , а направление оси Z определяется по правилу правой руки. При нелинейном статическом анализе, а также анализе стадии возведения, в MIDAS GTS применяются 2-узловые и 3-узловые балочные элементы комплекса DIANA, см. рис. 14. Во всех случаях, кроме двух вышеперечисленных, в MIDAS GTS используются 2-узловые балочные элементы. Модель материала Мизеса может быть использована при анализе стадии возведения и нелинейном расчете. В остальных случаях свойства материала считаются линейными и упругими.

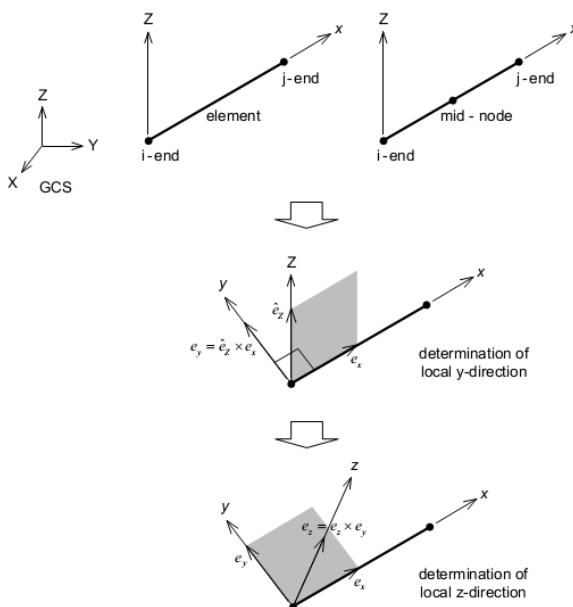


Рисунок 14. Местные оси балочного элемента

Свойства элементов

Балочные элементы поддерживают следующие линейные упругие параметры материала:

Модуль упругости	E
Коэффициент Пуассона	ν
Плотность	γ_t
Коэффициент температурного расширения	α

При нелинейном статическом расчете и анализе стадии возведения, возможно задать нелинейные свойства материала, поддерживаемы балочными элементами DIANA. В остальных случаях в MIDAS GTS работа балочных элементов считается линейной и упругой. MIDAS GTS имеет встроенную библиотеку поперечных сечений, параметры которых могут быть заданы пользователем. Площадь сечения считается постоянной по длине балочного элемента. В MIDAS GTS возможно задавать следующие характеристики сечения:

Площадь сечения	A
Постоянная кручения	I_x
Момент инерции относительно местной оси y	I_y
Момент инерции относительно местной оси z	I_z
Площадь среза относительно местной оси y	A_y
Площадь среза относительно местной оси z	A_z

Эксцентриситет может быть задан в виде свойства сечения. В MIDAS GTS возможно задавать только эксцентриситет для сечения. Эксцентриситет для сечения в MIDAS GTS – опция, позволяющая задавать ось эксцентриситета в какой либо точке сечения, возможны следующие варианты:

Слева	Сверху по центру	Сверху справа
Слева	В центре	В центре справа
Слева	Внизу по центру	Внизу справа

КЭ-формулировки

Постановка балочных элементов в MIDAS GTS может осуществляться по двум теориям. Для балочных элементов DIANA, применяющихся для нелинейного статического расчета и анализа стадии возведения, используется гипотеза Бернулли (сдвиговые деформации сечения не учитываются). Для

остальных задач в MIDAS GTS используется теория Тимошенко, так что элементы способны сопротивляться сжатию, растяжению, сдвигу, изгибу и кручению. В этом разделе приведена постановка для балочного элемента, используемого для двумерной задачи в плоскости x-z. Деформация балочного элемента определяется выражением:

$$u = z\beta_y(x) \quad \text{and} \quad w = w(x) \quad (5.4.11)$$

где u - перемещение по оси x;

z - координата по оси z;

β_y - угол к оси y;

w - перемещение по оси z.

Деформации и кривизна описываются выражениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = z\kappa_y \\ \gamma_s = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_y \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

где ε_b - осевое перемещение от изгиба;

γ_s - деформация сдвига;

κ_y - кривизна относительно оси y.

Момент, кривизна, сдвиговое усилие и сдвиговая деформация связаны выражениями:

$$\begin{aligned} M_y &= D_b \kappa_y = EI \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ V_y &= D_s \bar{\gamma}_{xz} = GA_s \bar{\gamma}_{xz} \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

где D_b - изгибная жесткость;

D_s - сдвиговая жесткость;

E - модуль упругости

I - геометрический момент инерции;

G - модуль сдвига;

A_s - площадь.

5.4.5 Пластинчатые (оболочечные) КЭ

Плоские и имеющие кривизну пространственные пластинчатые элементы могут иметь 3, 4, 6 или 8 узлов. Такие элементы используются для моделирования мембранных деформаций, поперечного сдвига и изгиба таких конструкций, как торкрет бетонная отделка, подпорные стенки, фундаментные плиты. Рекомендуется использовать четырехугольные элементы. При моделировании пластин, имеющих кривизну, угол между соседними элементами не должен превышать 10° . Кроме того, эти углы не должны превышать $2\sim 3^\circ$ на участках, где необходимо получить более точное решение (см. рисунок 15). Рекомендуется использовать прямоугольные элементы на участках, где возможно возникновение больших напряжений и, при этом, требуется получить более точные результаты. Для нелинейного расчета и анализа стадии возведения в MIDAS GTS используются пластинчатые элементы DIANA.

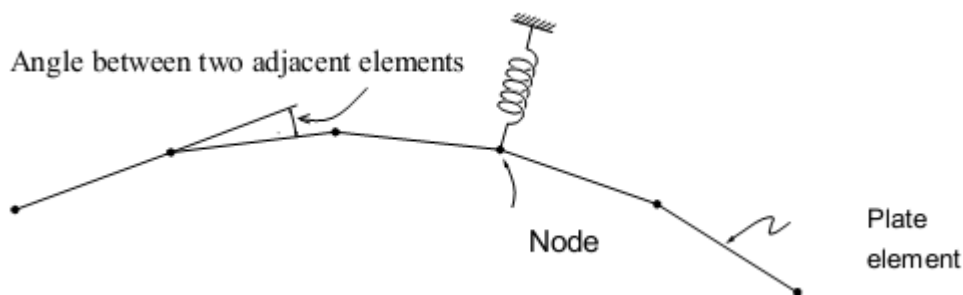
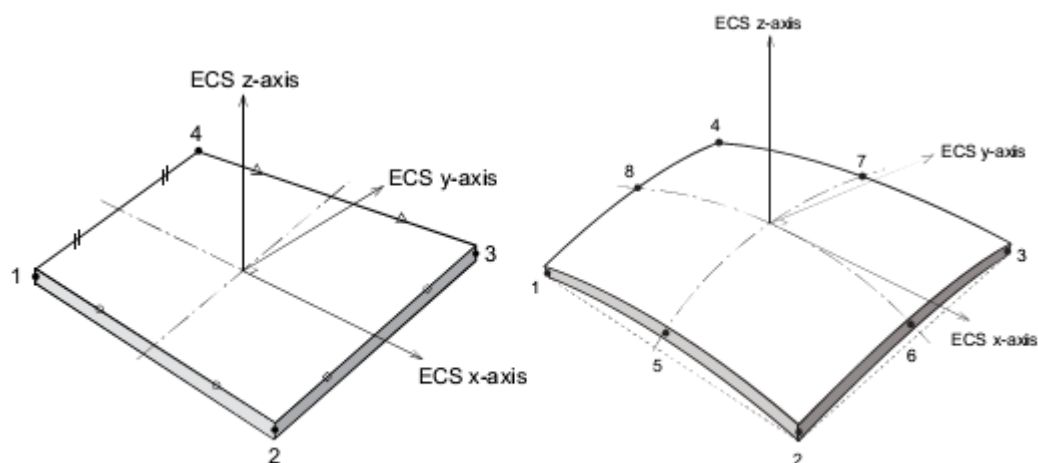


Рисунок 15. Пример использования пластинчатых элементов для моделирования отделки круглого тоннеля

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

Пластинчатые элементы имеют поступательные степени свободы по направлениям x , y , z местной системы координат и вращательные степени свободы относительно местных осей x и y . Местная система координат является правой прямоугольной. Направления местных осей задаются по тем же правилам, что и для элементов, моделирующих плоское напряженное состояние. Нумерация узлов осуществляется против часовой стрелки, нумерация внутренних узлов также осуществляется против часовой стрелки, после нумерации крайних узлов (рис. 16).



(a) Quadrilateral Element

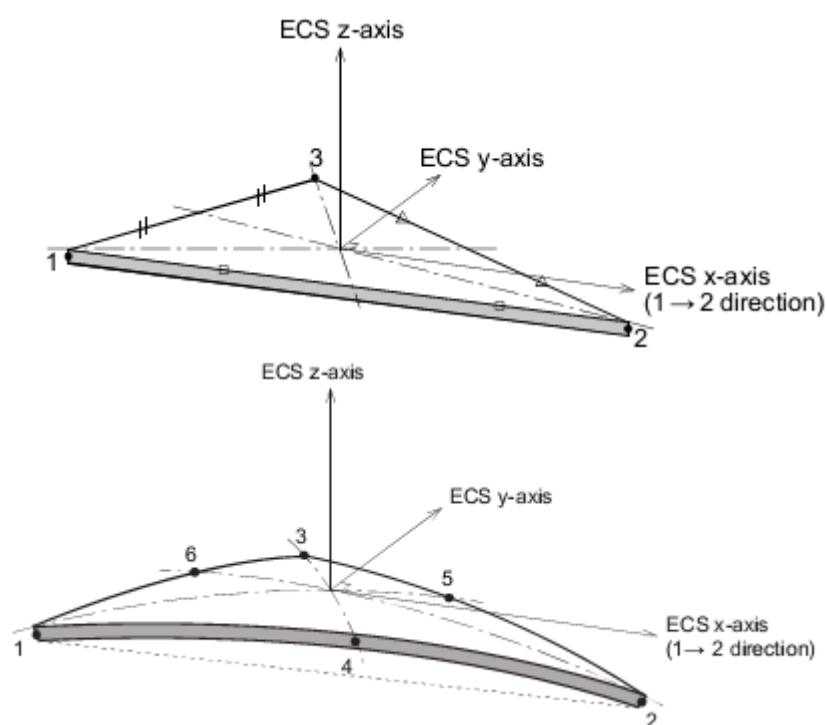


Рисунок 16. Пластинчатый элемент: конфигурация, нумерация узлов и локальная система координат

Свойства элемента

Пластинчатые элементы поддерживают следующие линейные упругие параметры материала:

Модуль упругости	E
Коэффициент Пуассона	ν
Плотность	γ
Коэффициент температурного расширения	α

Модель материала Мизеса, как и линейно-упругая модель, может использоваться для пластинчатых элементов. Толщина – один из геометрических параметров, поддерживаемых пластинчатыми элементами в MIDAS GTS, считается, что элемент имеет постоянную толщину.

КЭ-формулировка

Пластинчатые элементы имеют поступательные степени свободы по направлениям x , y , z местной системы координат и вращательные степени свободы относительно местных осей x и y . Работа пластинчатого элемента в плоскости и из плоскости происходит раздельно, поэтому элементов, имеющих кривизну, применяется «метод непрерывной пластины».

Для дискретного конечного элемента используются следующие постановки.

Деформация в плоскости элемента.

•3-узловой элемент

Изопараметрический элемент (аналогично элементу, моделирующему плоское напряженное состояние):

Вращательная степень свободы относительно оси z («бурильная») может быть активирована пользователем.

•4-узловой элемент

Изопараметрический элемент (аналогично элементу, моделирующему плоское напряженное состояние):

Вращательная степень свободы относительно оси z («бурильная») может быть активирована пользователем.

2. Деформация из плоскости

•3-узловой элемент

ДКТ (треугольный элемент с дискретным наложением гипотезы Кирхгофа), ДТКМ (треугольный элемент с дискретным наложением гипотезы Кирхгофа-Миндлина)

•4-узловой элемент

ДКЧ (четырёхугольный элемент с дискретным наложением гипотезы Кирхгофа), ДКМЧ (четырёхугольный элемент с дискретным наложением гипотезы Кирхгофа-Миндлина)

Изопараметрическая постановка при работе в плоскости аналогична постановке для элемента, моделирующего плоское напряженное состояние. Опция «Элемент вращения» активирует вращательную степень свободы относительно оси Z локальной системы координат в каждом узле элемента, этот дополнительный поворот вносит вклад в перемещения u и v :

$$x = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i y_i \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N N_i u_i + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N P_i (y_j - y_i) (\theta_j - \theta_{zi}) \\ v &= \sum_{i=1}^N N_i v_i - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N P_i (x_j - x_i) (\theta_j - \theta_{zi}) \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

где θ_{zi} - поворот по дополнительной степени свободы в i -ом узле.

Интегрирование матрицы жесткости осуществляется методом Гаусса.

Таблица 8 Число точек интегрирования для дискретных пластинчатых элементов

Вид элемента	Число точек интегрирования
3-узловой треугольный	1
4-узловой четырёхугольный	4

При активации опции «Элемент вращения», поступательное перемещение в направлении, перпендикулярном граням элемента, требуется интерполяция третьего порядка, как показано на рисунке 17, что позволит получить более точные результаты.

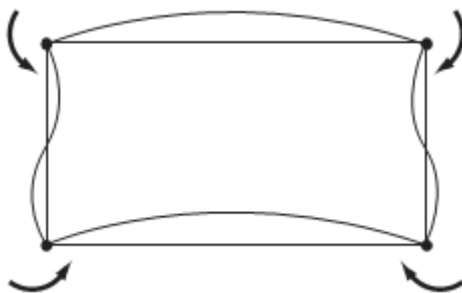


Рисунок 17. Взаимосвязь поступательных перемещений и вращательных степеней свободы

ДКМТ (3-узловой) и ДКМЧ (4-узловой) элементы рассматриваются в постановке, учитывающей сдвиговые деформации. Элементы имеют только три степени свободы в каждом узле, а именно, перемещение по местной оси z , w и углы поворота относительно местных осей x и y θ_x and θ_y .

5.4.6 Интерфейсные (контактные) КЭ

Интерфейсные элементы MIDAS GTS позволяют моделировать скольжение между разнородными материалами или элементами, имеющими сильно отличающиеся жесткости. Это особый вид элементов, предложенный Гудманом и др. (1968), используется для моделирования относительных перемещений объемных элементов, граничащих с интерфейсным элементом. Такие элементы часто применяются для моделирования упругих и не упругих (например, неработающих на растяжение) опор, трещин, сцепления арматуры с бетоном, трения между поверхностями, трещин в горных породах, каменной кладки и т.д. По форме и совместимости эти элементы разделяются на три группы:

1. Узловые интерфейсные элементы - расположенные между двух узлов.

Для этих элементов поверхность и направление стыка задаются пользователем.

2. Линейные интерфейсные элементы - расположенные между стержневыми элементами, балочными элементами или гранями двумерных или трехмерных элементов. Для этих элементов поверхность и направление стыка определяются автоматически, исходя из геометрии.

3. Плоские интерфейсные элементы - расположенные между гранями трехмерных элементов. Для этих элементов поверхность и направление стыка также определяются автоматически, исходя из геометрии.

Упругое сопротивление в относительных перемещениях задается с обеих сторон интерфейсного элемента, а напряжения определяются как в нормальном, так и касательном направлении.

Далее, задается трение по модели Кулона для ограничения сдвига по интерфейсному элементу.

Модель трения Кулона подразумевает задание максимального сдвигающего напряжения на грани в виде функции нормальных напряжений, сцепления и угла внутреннего трения.

Растягивающие напряжения в интерфейсном элементе могут не учитываться при активации опции усечения в области растяжения.

Число степеней свободы в узлах совпадает с числом степеней свободы плоских или пространственных элементов, примыкающих к интерфейсному.

Интерфейсный элемент использует стандартную конечноэлементную постановку, толщина элемента принимается равной нулю. При проведении численного расчета для элементов с нулевой толщиной, должно применяться метод штрафных жесткостей при помощи введения нормальной и касательно жесткости (см. рис. 4.1.2). Так как большая штрафная жесткость приводит к неустойчивости численного решения, она также может привести к неточному вычислению относительных перемещений даже для весьма малых величин. Поэтому следует уделять особое внимание величине, задаваемой штрафной жесткости. В MIDAS GTS рекомендуемая величина штрафной жесткости равна $k = 1000 \times E / d_v$, где E - наименьшее значение модуля Юнга для примыкающих элементов, а d_v - параметр, учитывающий отличную от нуля толщину элементов. Параметр ненулевой толщины для штрафной жесткости может принимать значения от 0.1 до 1. Параметр ненулевой толщины не является ее величиной, а представляет собой масштабный коэффициент, учитывающий единицы измерения

и величину штрафной жесткости. Единица измерения модуля упругости - $H / м^2$, а штрафной жесткости - $H / м^3$.

Нормальные и сдвигающие напряжения характеризуют работу интерфейсного элемента. Общий вид системы уравнений, связывающей сцепление t и относительное перемещение Δu :

$$\mathbf{t} = \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (5.4.16)$$

При решении плоских задач:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{Bmatrix} \quad (5.4.17)$$

где k_x - нормальная жесткость;

k_y - сдвиговая жесткость;

t_x - нормальное сцепление, $[H / м^2]$;

t_y - касательное сцепление, $[H / м^2]$;

Δu_x - нормальное относительное перемещение, $[м]$;

Δu_y - касательное относительное перемещение, $[м]$;

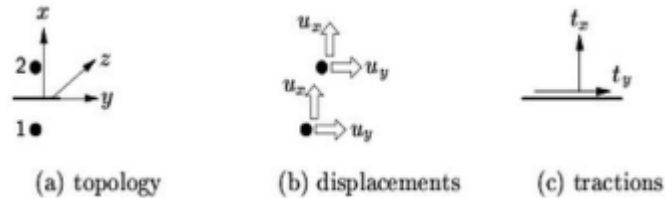


Рисунок 18. Интерфейсный элемент, расположенный между двух узлов в плоской постановке

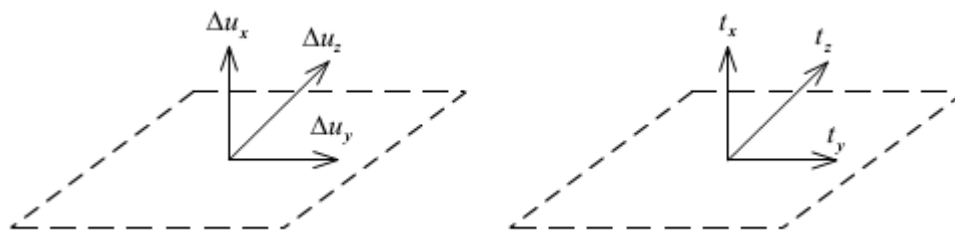
Для трехмерных задач, используются следующие параметры:

t_x - нормальное сцепление, $[H / м^2]$;

t_y, t_z - касательные сцепления, $[H / м^2]$;

Δu_x - нормальное относительное перемещение, $[м]$;

$\Delta u_y, \Delta u_z$ - касательные относительные перемещения, $[м]$;



(a) Относительные перемещения

(b) Силы сцепления

Рисунок 19 : Относительные перемещения и силы сцепления для трехмерного интерфейсного элемента (обозначен пунктирной линией)

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

В MIDAS GTS поддерживаются все виды линейных интерфейсных элементов, показанные на рисунке 19 и пластинчатые интерфейсные элементы, показанные на рисунке 20. Существуют особенности использования линейных и пластинчатых элементов в двумерных и трехмерных задачах.

Линейные интерфейсные элементы в MIDAS GTS применяются только при решении двумерных задач и могут быть высокого и низкого порядков (см. рисунок 19). Линейный интерфейсные элементы могут использоваться для моделирования сближения/удаления и проскальзывания элементов, моделирующих плоскую деформацию или элементов, моделирующих плоскую деформацию и балочных элементов, или осесимметричных элементов.

Нижеперечисленные элементы могут быть использованы для моделирования взаимодействия сооружения и основания в трехмерной постановке. Возможны следующие сочетания: взаимодействие двух объемных элементов, объемного и пластинчатого элемента, а также элементов, моделирующих плоское напряженное состояние или армирующих грунт элементов.

Линейный элемент (1+1 узел)

Треугольный элемент низкого порядка (3+3 узла)

Треугольный элемент высокого порядка (3+3 узла)

Четырехугольный элемент низкого порядка (4+4 узла)

Четырехугольный элемент высокого порядка (8+8 узлов)

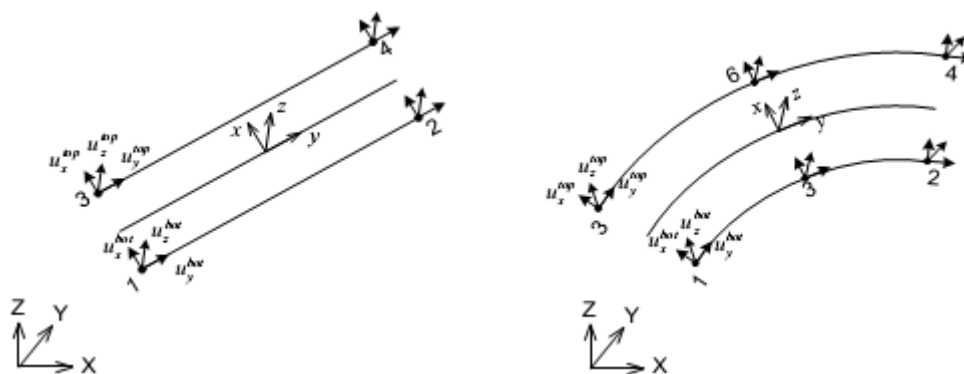


Рисунок 19. Линейные интерфейсные элементы

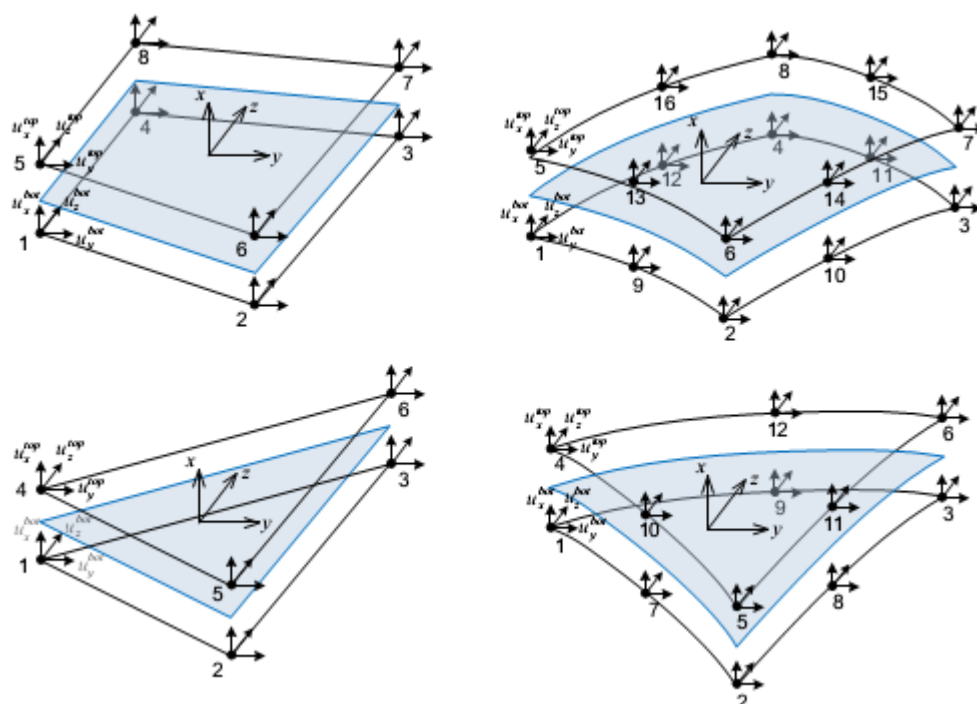


Рисунок 20. Пластинчатые интерфейсные элементы

Свойства элемента

Для плоских конструкций линейные связевые элементы поддерживают следующие параметры:

Жесткость по направлению местной оси X k_x

Жесткость по направлению местной оси Y k_y

Жесткость по направлению местной оси Z k_z

КЭ-формулировка

Относительные перемещения $\Delta u_n, \Delta u_s, \Delta u_t$ связаны с матрицей жесткости D выражением:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} \quad (5.4.18)$$

Энергия деформации интерфейсного элемента:

$$\mathbf{K}_{inter} = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{inter}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{inter} d\Gamma \quad (5.4.19)$$

Кроме того, инерционные силы могут быть получены при помощи интеграла:

$$\mathbf{F}_{inter} = \int_{\Gamma} \mathbf{B}_{inter}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (5.4.20)$$

Применяя численное интегрирование матрицы (5.4.18), получим:

$$\mathbf{K}_{inter} = \sum_{j=1}^{Nip} \mathbf{B}_{inter}^j{}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{inter}^j \det \mathbf{J}^j \mathbf{W}^j \quad (5.4.21)$$

$$\mathbf{F}_{inter} = \sum_{j=1}^{Nip} \mathbf{B}_{inter}^j{}^T \mathbf{t} \det \mathbf{J}^j \mathbf{W}^j \quad (5.4.22)$$

где Nip - число точек интегрирования

\mathbf{B}_{inter} - матрица, связывающая относительные перемещения и перемещения элемента.

Интегрирование осуществляется методом Ньютона-Котеса.

Таблица 9. Число точек интегрирования для интерфейсных элементов

Вид элемента	Число точек интегрирования
4-узловой линейный	2
6-узловой линейный	3
6-узловой треугольный	3
8-узловой четырехугольный	4
12-узловой треугольный	6
16-узловой четырехугольный	9

Пластинчатые интерфейсные элементы: Сегментное соединение

Пластинчатые интерфейсные элементы используются для моделирования нелинейных элементов отделки туннелей. Их применяют для моделирования тоннелей, возводимых методом щитовой проходки с использованием сегментной отделки. Элементы позволяют моделировать шарнирное опирание, отдаление, сближение и сдвиг элементов отделки относительно друг друга.

Постановка пластинчатых интерфейсных элементов аналогична постановке двумерных линейных интерфейсных элементов, но для пластинчатых элементов требуется дополнительно задать поступательные и вращательные степени свободы.

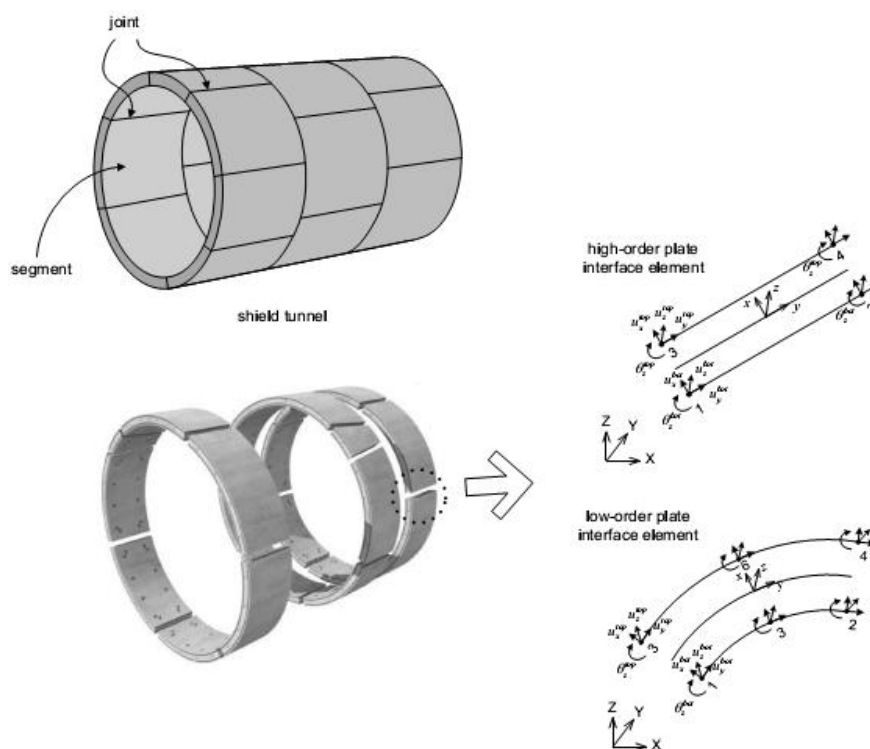


Рисунок 21 Пластинчатый интерфейсный элемент (высокого и низкого порядков)

4-узловые элементы низкого порядка и 6-узловые элементы высокого порядка доступны в midas GTS только при решении трехмерных задач.

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

В общем случае форма пластинчатого интерфейсного элемента схожа с формой двумерного линейного интерфейсного элемента (см. рисунок 22). Узлы 1 и 2 расположены внизу, а 3 и 4 – вверху элемента.

Для элементов высокого порядка, сначала осуществляется нумерация узлов, соответствующих элементу низкого порядка, а затем снизу вверх нумеруются внутренние узлы.

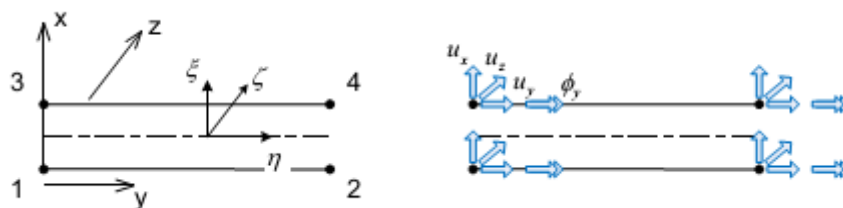


Рисунок 22. Топология пластинчатого интерфейсного элемента

Поступательные перемещения по местной оси z и вращение относительно местной оси y – свойства, поддерживаемые пластинчатыми интерфейсными элементами (в отличие от линейных интерфейсных элементов), см. рисунок 23.

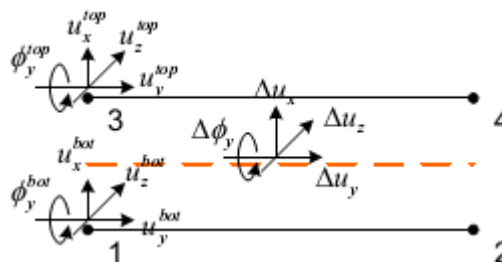


Рисунок 23. Перемещение и деформация пластинчатого интерфейсного элемента

Деформация растяжения элемента и относительные перемещения и матрица формы для пластинчатого интерфейсного элемента:

$$t = \begin{Bmatrix} n_x \\ t_y \\ t_z \\ m_y \end{Bmatrix}, \quad \Delta u_e = \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \\ \Delta \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x,side} - u_{x,opposite side} \\ u_{y,side} - u_{y,opposite side} \\ u_{z,side} - u_{z,opposite side} \\ \phi_{y,side} - \phi_{y,opposite side} \end{Bmatrix} \quad (5.4.22)$$

Свойства элементов

Свойства материала, поддерживаемые интерфейсными элементами:

Модуль упругости E

Коэффициент Пуассона ν

Толщина элемента b

Система уравнений для интерфейсного пластинчатого элемента для случая движения жесткого тела:

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ t_y \\ t_z \\ m_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eb^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \\ \Delta \phi_y \end{Bmatrix} \quad (5.4.23)$$

Для пластинчатых интерфейсных элементов MIDAS GTS поддерживается модель трения Кулона и модель движения жесткого тела. Кроме того, модель Янсена доступна для нелинейных расчетов.

КЭ-формулировка

Степени свободы пластинчатого интерфейсного элемента определяются в локальной системе координат, местная ось x направлена вдоль линии, соединяющей 1-ый и 2-ой узлы, она является касательно к плоскости элемента. Местная ось z направлена по направлению толщины, таким образом локальная система координат определяется автоматически при помощи анализа геометрии соединяемых элементов, как это показано на рисунок. 24.



Рисунок 24 Определение направления местных осей для пластинчатого интерфейсного элемента

5.4.7 Свайные КЭ

Свайные КЭ для моделирования свай трения

Свайные КЭ обычно используются для решения трехмерных задач, потому что сохранение связи между узлами не требуется, возможно моделировать нелинейные контактные процессы такие, как трение сваи о грунт. Кроме балочных свойств, для свайных элементов требуется задать условия контакта с грунтом. Входные параметры свайного элемента совпадают с параметрами балочного элемента. Параметры контакта с грунтом будут рассмотрены более подробно.

Рисунок 25 показывает схему внедрения балочного элемента в материнский элемент. Свайные элементы могут создаваться только при использовании объемных элементов.

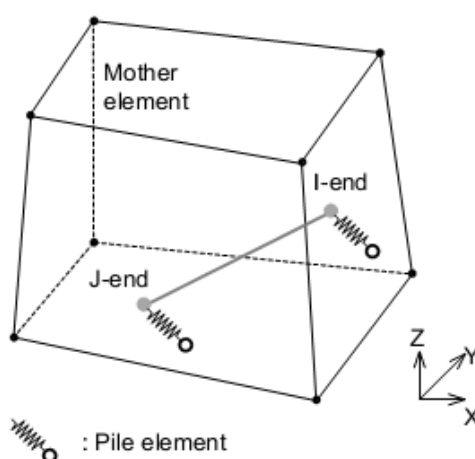


Рисунок 25 Элемент свай трения

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

В предыдущем разделе был описан трехмерный элемент, с внедренным фрагментом сваи. Этот фрагмент соединялся с трехмерным элементов при помощи трехмерного интерфейсного элемента контакта сваи с трехмерным КЭ. Так как участок сваи имеет собственные узлы, относительные перемещения сваи и объемного элемента возможны, а контакт задается при помощи такого интерфейсного элемента.

Местная ось x определяется направлением линии, соединяющей узлы с номерами 1 и 2, ось y параллельна глобальной оси Z , а направление местной оси z

определяется по правилу правой руки. Степени свободы элемента показаны на рисунок 26.

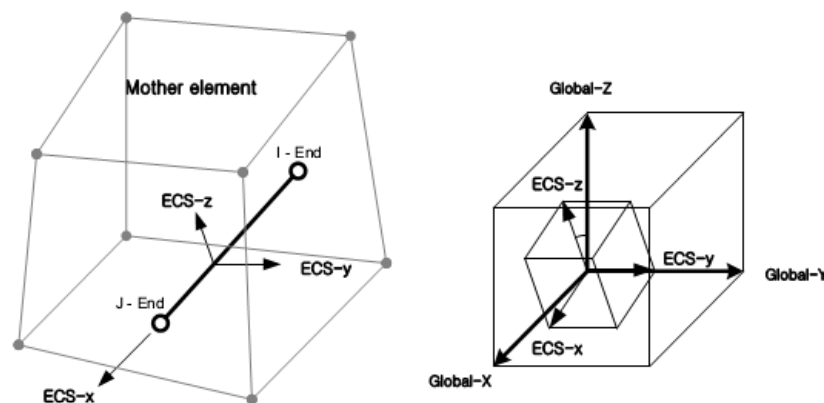


Рисунок 26. Система координат свайного элемента

Свойства элементов

В случае моделирования жесткого тела, свайные элементы поддерживают следующие параметры:

Жесткость по направлению местной оси X k_x

Жесткость по направлению местной оси Y k_y

Жесткость по направлению местной оси Z k_z

Прочность и жесткость могут быть заданны переменными по длине сваи как свойства свайных элементов, в добавление к возможности задать перемещения сваи как движения жесткого тела.

КЭ-формулировка

Сваи могут моделироваться следующими трехмерными элементами низкого или высокого порядка:

- 8-узловой/20-узловой 6-гранный элемент (кирпичик)
- 6-узловой/15-узловой 5-гранный элемент (клин)
- 4-узловой/10-узловой 4-гранный элемент (тетраэдр)

Сваи могут моделироваться следующими линейными элементами: 2-узловой стержневой элемент

- 2-узловой балочный элемент

Глобальная система координат для интерфейсных элементов может быть описана так:

$$\mathbf{X} = \{X_1 \quad X_2 \quad X_3\} \quad (5.4.24)$$

Локальная система координат интерфейсного элемента связана с глобальной следующим образом:

$$\mathbf{x} = \{x_1(X_1^1, X_2^1, X_3^1) \quad x_2(X_1^2, X_2^2, X_3^2) \quad x_3(X_1^3, X_2^3, X_3^3)\} = \{X_1 \quad X_2 \quad X_3\} \quad (5.4.25)$$

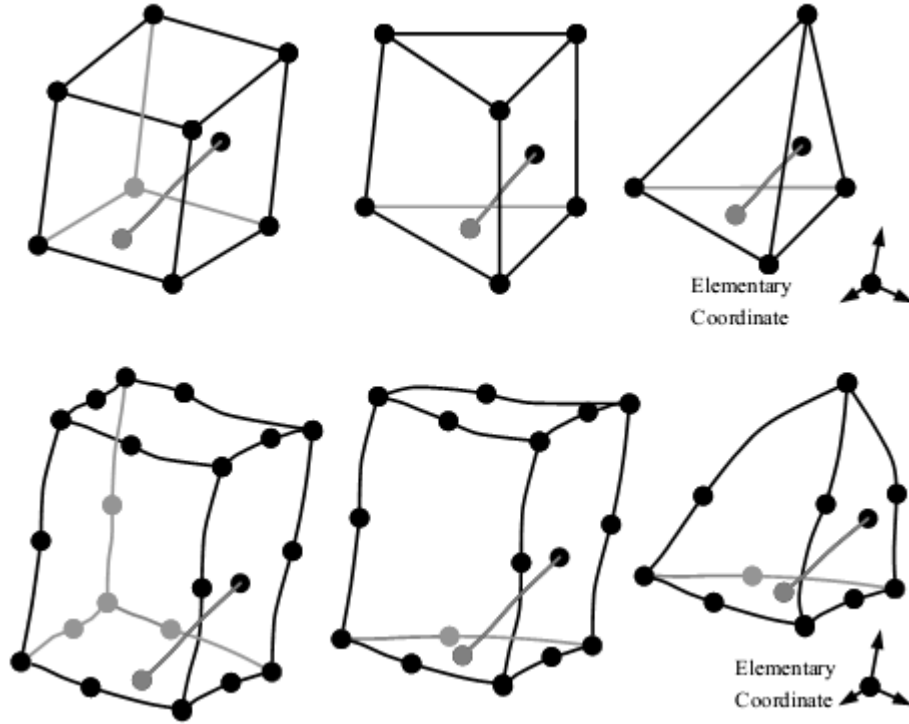


Рисунок 27. Виды интерфейсных элементов для соединения трехмерных и стержневых элементов

Глобальная система координат описывается выражением:

$$\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (5.4.26)$$

Локальную систему координат можно описать ортогональной матрицей:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \end{bmatrix} \quad (5.4.27)$$

Узловые координаты в локальной системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \quad x_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) \quad x_3(x_1^3, x_2^3, x_3^3)\} \\ &= \begin{bmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \end{bmatrix} \{x_1(X_1^1, X_2^1, X_3^1) \quad x_2(X_1^2, X_2^2, X_3^2) \quad x_3(X_1^3, X_2^3, X_3^3)\}^T \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

Интегрирование матрицы жесткости осуществляется методом Ньютона-Котеса.

Таблица 10 Число точек интегрирования для свайного элемента

Вид элемента	Число точек интегрирования
4-узловой линейный	2
6-узловой линейный	3

Свайные КЭ для моделирования свай стоек

Выше рассмотрены свайные КЭ, основанные на контакте линейного и объемного элементов, учитывающие трение сваи о стенки скважины (проскальзывание); однако, они не позволяют моделировать нелинейности, возникающие при отказе (в основании сваи). Поэтому, рассмотренные выше КЭ следует применять для моделирования достаточно длинных свай, для которых вкладом нелинейности, возникающей в основании сваи, можно пренебречь.

Для ограничения несущей способности сваи вводится дополнительный интерфейсный элемент (узел+объемный элемент) на конце сваи. Таким образом, полученный элемент поддерживает как нелинейность от трения о стенки скважины, так и от отпора грунта.

При создании свайных элементов, пользователь может задать дополнительную связь на конце сваи. В этом случае создается интерфейсный элемент контакта между точкой и объемным элементом на конце сваи, который связывает узел балочного свайного элемента с окружающими трехмерными элементами грунта. Это интерфейсный элемент (узел+объемный элемент) может быть ориентирован пользователем для задания нелинейных свойств по оси сваи. Эти свойства могут быть идеально пластичными (высокая упругая жесткость и ограниченная несущая способность) или заданными пользователем в виде линейной диаграммы зависимости силы от перемещения.

- Несущая способность – максимальная величина воспринимаемой нагрузки на конце сваи.

- Пружинная жесткость конца сваи – начальная упругая жесткость, которую имеет свая до отказа.

При активации данной опции, работа сваи в ее основании будет линейной до достижения указанной несущей способности, при этом свая работает идеально пластично.

Следует учитывать, что упругая жесткость в основании сваи должна быть достаточно большой для получения незначительных перемещений и, в то же время, достаточно малой по сравнению коэффициентом сдвиговой жесткости шахты по длине сваи для повышения устойчивости численного решения.

- Пружинную жесткость в основании сваи можно задать в виде функции. Это позволяет пользователю задавать ее в виде зависимости силы реакции от относительного осевого перемещения конца сваи и окружающих его элементов грунта.

Наконец, интерфейсный элемент (точка+объемный элемент) может использовать мультилинейную диаграмму зависимости реакции от перемещения, получаемой при умножении нормализованной функции (с учетом размерности) на заданную несущую способность (с учетом размерности).

Свайные элементы с задаваемыми условиями опирания используют условия контакта вида линия+объемный элемент и точка+объемный элемент в виде, хранящемся в библиотеке стандартных свайных элементов и свайных элементов с заданными условиями опирания. На рис. 28 показан процесс моделирования сваи стойки с заданными условиями опирания в MIDAS GTS, состоящий в задании интерфейсного элемента (точка+объемный элемент) в элементе с дополнительным контактом линейного элемента с объемным.

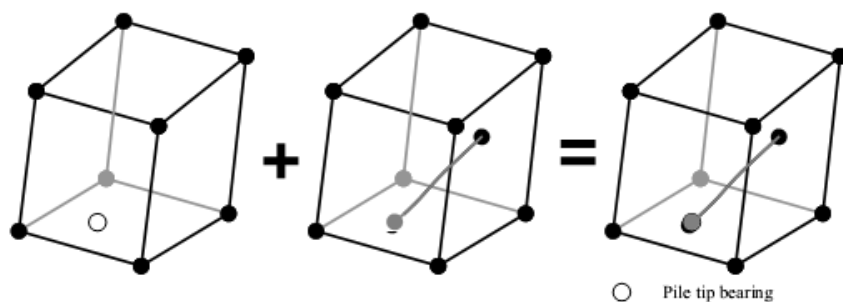


Рисунок 28. Моделирование несущего элемента в основании сваи

Осевая жесткость по несущей способности в основании сваи учитывается в узлах, примыкающим к основанию сваи в узлах пересечения свайного элемента с балочным.

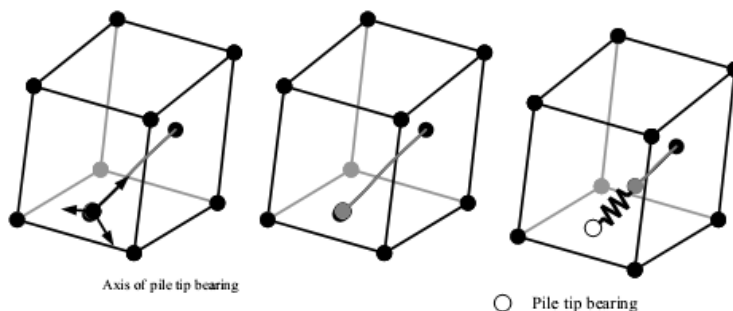


Рисунок 29. Несущий элемент в основании сваи с жесткой связью

Форма КЭ, совместимость, степени свободы

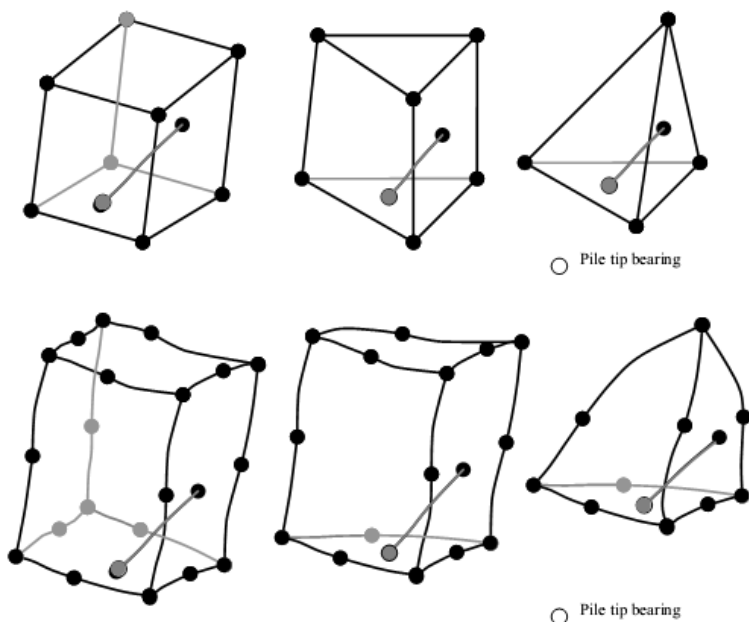


Рисунок 30 Различные виды интерфейсных элементов для соединения трехмерных и стержневых элементов

Свойства элементов

В случае моделирования сваи как жесткого тела, следует задавать следующие характеристики материала:

Жесткость по направлению местной оси X k_x

Жесткость по направлению местной оси Y k_y

Жесткость по направлению местной оси Z k_z

Разупрочнение материала может быть задано для движения жесткого тела.

5.4.8 Упругие связи

Упругая связь соединяет два узла, ее жесткость задается пользователем. Связь имеет жесткость только в локальной системе координат. При помощи трех поступательных и трех вращательных жесткостных характеристик можно задать упругую связь так, что она будет работать только на растяжение или сжатие. Жесткости задаются в виде погонной силы или момента. В качестве примера применения упругих связей можно привести опорные элементы, соединяющие настил моста с его опорами. Связи, работающие только на сжатие можно применять в качестве граничных условий для грунта.

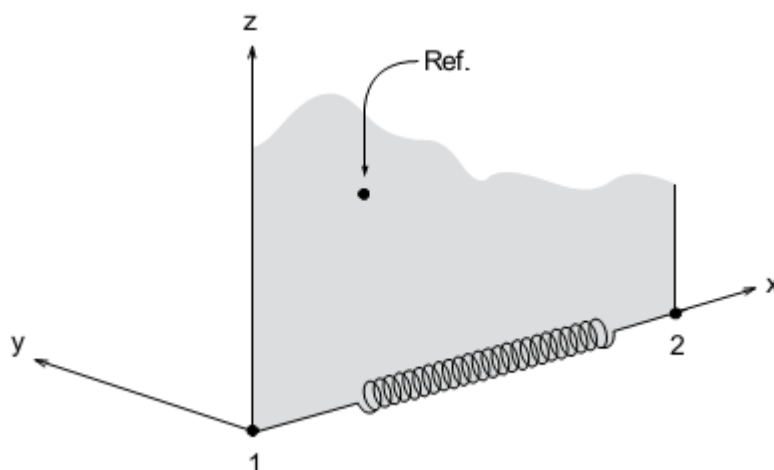


Рисунок 31 Система координат для связей конечной жесткости

5.4.9 Жесткие связи

Жесткие связи ограничивают перемещения и углы поворота 2-х или более узлов. Таким образом, степень свободы одного узла определяется одной или несколькими степенями свободы одного или нескольких узлов. Этот узел называется подчиненным, а узлы, определяющие его степени свободы – главными. Геометрические зависимости для при условии, что главный и подчиненный узлы не лежат на одной прямой:

$$\begin{aligned}
U_{Xs} &= U_{Xm} + R_{Ym}\Delta Z - R_{Zm}\Delta Y \\
U_{Ys} &= U_{Ym} + R_{Zm}\Delta X - R_{Xm}\Delta Z \\
U_{Zs} &= U_{Zm} + R_{Xm}\Delta Y - R_{Ym}\Delta X \\
R_{Xs} &= R_{Xm} \\
R_{Ys} &= R_{Ym} \\
R_{Zs} &= R_{Zm} \\
\Delta X &= X_m - X_s \\
\Delta Y &= Y_m - Y_s \\
\Delta Z &= Z_m - Z_s
\end{aligned}
\tag{5.4.29}$$

где U_{Xs}, U_{Ys}, U_{Zs} - перемещения подчиненного узла в глобальной системе координат по осям X, Y, Z;

U_{Xm}, U_{Ym}, U_{Zm} - перемещения главного узла в глобальной системе координат по осям X, Y, Z;

R_{Xs}, R_{Ys}, R_{Zs} - углы поворота подчиненного узла в глобальной системе координат относительно осей X, Y, Z;

R_{Xm}, R_{Ym}, R_{Zm} - углы поворота главного узла в глобальной системе координат относительно осей X, Y, Z;

X_s, Y_s, Z_s - координаты подчиненного узла в глобальной системе координат;

X_m, Y_m, Z_m - координаты главного узла в глобальной системе координат;

6. Матрицы верификации

В соответствии с описанными возможностями были составлены матрицы верификации, отражающие весь объем верифицируемых примеров представленных в томах 2,3 настоящего отчета.

Том 2 - верификационные примеры из MIDAS GTS verification manual, т.е. примеры, предложенные и выполненные самими разработчиками ПК. В рамках данного тома эти примеры были выполнены и просчитаны заново с целью анализа и оценки достоверности результатов.

Том 3 - верификационные примеры, предложенные экспертами и командой верификации.

Таблица 11. Примеры из MIDAS GTS verification manual. Матрица верификации №1

№	Наименование теста	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Оцениваемые параметры	Погрешность, %
1	Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации,	Радиальное напряжение	0,92
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,77 / 1,7
				Радиальное перемещение	1,25
			4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	Радиальное напряжение	0,95
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,84 / 1,24
				Радиальное перемещение	1,49
2	Сферическая полость в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	Радиальное напряжение	0,01
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,33 / 0,16
				Радиальное перемещение	1,25
3	Цилиндрическое отверстие в бесконечной среде Мора-Кулона	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Радиус зоны текучести	2,94
			4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент		4,15
			8-ми узловой гексаэдр		2,94
4	Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Приведенное радиальное перемещение ($0^0/90^0$)	0,27 / 7,37
				Приведенное касательное перемещение (45^0)	0,46

MIDAS GTS. Верификационный отчет. Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации

				Приведенное продольное усилие (0 ⁰ /45 ⁰ /90 ⁰)	1,24 / 0,51/ 1,08
				Приведенные изгибающие моменты (0 ⁰ /45 ⁰ /90 ⁰)	14,87 / 0 / 14,97
5	Жесткий ленточный фундамент на упругом основании	(1)	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	Нагрузка на фундамент	0,85
6	Ленточная нагрузка на упругом основании Гибсона	(1)	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	Осадка	7,4
7	Круглый фундамент на упругом полупространстве	(1), (3)	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	Осадка	7,4
				Давление под подошвой (размер модели 40х40м)	11,37-21,83
				Давление под подошвой (размер модели 80х80м)	5,79-15,72
8	Ленточные фундаменты на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона)	(1)	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Разрушающая нагрузка	0,5
			20-ти узловой гексаэдр		0,31
	Круглые фундаменты на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона)		8-ми узловой осесимметричный четырехугольный элемент		5,23
			20-ти узловой гексаэдр		5,08
10	Гладкий квадратный фундамент на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона - для связного грунта при отсутствии трения)	(1)	20-ти узловой гексаэдр	Разрушающая нагрузка	Соответствует аналитическим границам

MIDAS GTS. Верификационный отчет. Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации

12	Откопка с применением распорок	(2)	8-ми узловой гексаэдр	Продольное усилие в распорке	6,05
----	--------------------------------	-----	-----------------------	------------------------------	------

- (1) - сравнение с аналитическим решением
 (2) - сравнение с альтернативными ПС
 (3) - в примере анализируется сходимость решения в зависимости от размера сетки

Таблица 12. Примеры из MIDAS GTS verification manual. Матрица верификации №2. Типы верифицированных конечных элементов

	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой гексаэдр	20-ти узловой гексаэдр
Линейная статика	5, 6	1, 4	-	1, 2, 7	-	12	-
Нелинейная статика	-	3	8	3	8	3	8, 10

Таблица 13. Примеры, предложенные экспертами и командой верификации. Матрица верификации №3

№	Наименование теста	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Оцениваемые параметры	Погрешность, %
1	Статический расчет шарнирно опертой балки	(1), (2)	Балочный изгибаемый элемент	Максимальное нормальное напряжение	0,066
				Перемещение	0,291
2	Статический расчет прямоугольной пластинки, три края которой зашкелены, четвертый свободен	(1)	3-х и 6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE), 4-х и 8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	Изгибающий момент M _x	0,18-9,77
				Изгибающий момент M _y	1,58-10,71
				Реактивная сила V _x	4,18 - 15,08
				Реактивная сила V _y	9,19 - 13,07
				Перемещение	12,93 - 13,67

MIDAS GTS. Верификационный отчет. Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации

3	Статический расчет кольцевой пластины	(1)	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент	Максимальный радиальный изгибающий момент M_r	0,67
				Максимальный тангенциальный изгибающий момент M_θ	4,25
				Перемещение (прогиб) на внутреннем контуре	0,85
4	Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Касательное напряжение в зависимости от коэффициента Пуассона	1.38 - 12.7
5	Круглый фундамент на упругом полупространстве. Контактная задача.	(1)	4-х узловой тетраэдр, жесткие связи.	осадка	4.5-10.5
				напряжение под подошвой	2.8-5.7
			10-ти узловой тетраэдр, жесткие связи. жесткие связи.	осадка	2.6 - 4.9
				напряжение под подошвой	2.8-5.7
6	Моделирование испытания на трехосное сжатие	-	4-х и 10-ти узловой тетраэдр, 4-х и 8-ми узловой КЭ плоской деформации	Предельное вертикальное напряжение	0,1
7	Моделирование испытания на одноплоскостной срез	(1)	4-х узловой тетраэдр, жесткие связи	Сдвиговое усилие	4,3
8	Определение активного и пассивного давления грунта на подпорную стенку	(1)	8-ми узловой КЭ плоской деформации	Активное давление	8.7-3.8
				Пассивное давление	0.1-12.9
9	Расчет устойчивости насыпи	(4)	3-х и 6-ти узловые треугольные элементы плоской деформации, 4-х и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации	Предельная высота отвала	11,1-27,8

MIDAS GTS. Верификационный отчет. Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации

10	Расширение цилиндрической скважины в упруго-пластической среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Приведенное перемещение стенки скважины	12,35
11	Пластическое нагружение толстостенного цилиндра	(1), (3)	4-х и 8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент, 8-ми и 20-ти узловой гексаэдр	Упругое радиальное σ напряжение	0,02 - 61,34
				Упругое тангенциальное (кольцевое) σ напряжение	0,02 - 4,97
				Наибольшее касательное напряжение по теории прочности Треска τ_{max}	0,00 - 6,38
12	Статический расчет прямоугольно в плане фундаментной плиты	(2)	6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации, 10-ти узловой тетраэдр	Максимальный изгибающий момент M	35,33 / 26,21
				Максимальное перемещение U	2,6 / 0,15
13	Статический расчет каркасно-монолитного здания на упруго-пластическом основании	(2)	8-ми узловой октаэдр, 4-х узловой пластинчатый элемент, стержневой балочный элемент	Максимальный изгибающий момент вдоль плиты	2,7
				Максимальный изгибающий момент поперек плиты M, кН·м/м	4,4
				Максимальное перемещение U	1,2
				δU	14
14	Моделирование испытания сваи на вертикальную нагрузку	(4)	4-х узловой тетраэдр, 10-ми узловой гексаэдр, 4-х угольный интерфейсный элемент, стержневой балочный элемент, специальный интерфейсный элемент сваи (pile element)	График "нагрузка-осадка"	-

		(2)	Осесимметричный 3-х узловой элемент, интерфейсный 2-х узлой одномерный элемент.	График "нагрузка- осадка"	-
15	Комбинированный свайный фундамент при действии горизонтальной нагрузки	(4)	10-ти узловой тетраэдр, стержневой, балочный элемент, специальный свайный интерфейсный элемент	График "нагрузка- осадка"	-
				Максимальный изгибающий момент в свае	40 - 2.7
16	Пластическое нагружение балки прямоугольного сечения	(1)	8-ми узловой четырёхугольный элемент плоской деформации	Длина зоны пластических деформаций	3,23
(1)	- сравнение с аналитическим решением				
(2)	- сравнение с альтернативными ПС				
(3)	- в примере анализируется сходимость решения в зависимости от размера сетки				
(4)	- данные из литературных источников				

Таблица 14. Примеры, предложенные экспертами и командой верификации.

Матрица верификации №4. Типы верифицированных конечных элементов

	3-х узловой треугольный элемент плоской деформации	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырёхугольный элемент плоской деформации	8-ми узловой четырёхугольный элемент плоской деформации	3-х узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE)	6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE)
Линейная статика			3		2	2
Нелинейная статика	9	9	9, 12, 6	9, 16, 6, 8		12
Расчеты на устойчивость	9	9	9	9		

MIDAS GTS. Верификационный отчет. Том 1. Общие сведения. Матрицы верификации

	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	3-х узловой треугольный осесимметричный элемент	6-ти узловой треугольный осесимметричный элемент	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент	4-х узловой тетраэдр
Линейная статика	2, 3	2					5
Нелинейная статика	13		14		11	11	6,7, 14
Расчеты на устойчивость							

	10-ти узловой тетраэдр	Жесткие связи	Односторонние связи	8-ми узловой гексаэдр	20-ти узловой гексаэдр	Балочный изгибаемый стержневой элемент	Свайный элемент (PILE)	Интерфейсный элемент (1D)	Интерфейсный элемент (2D)
Линейная статика	5	5				1			
Нелинейная статика	6, 15,12	7	8	11,13,14	11	13,14	14,15	14	14,15
Расчеты на устойчивость									

7 Описание верификационных примеров

Как уже было отмечено выше в рамках верификации были также рассмотрены примеры, представленные самими разработчиками ПК:

- 1) *Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде*
- 2) *Сферическая полость в бесконечной упругой среде*
- 3) *Цилиндрическое отверстие в бесконечной среде Мора-Кулона*
- 4) *Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями*
- 5) *Жесткий ленточный фундамент на упругом основании*
- 6) *Ленточная нагрузка на упругом основании Гибсона*
- 7) *Круглый фундамент на упругом полупространстве*
- 8) *Ленточные и круглые фундаменты на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона)*
- 9) *Гладкий квадратный фундамент на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона - для связного грунта при отсутствии трения)*
- 10) *Откопка с применением распорок*

Характерная особенность этих примеров заключается в том, что в качестве эталонного решения рассматривается строгое теоретическое решение, признанное научным сообществом по механике грунтов и теории сплошных сред, однако данные решения реализованы для случая упругой работы (идеально упругая стадия) материала или для случая, когда материал находится в условиях предельного равновесия под действующей нагрузкой (полностью пластическая стадия). Как известно основная работа грунтового массива в большинстве случаев строительной практики находится в упруго-пластической стадии. Строгих теоретических решений для этих случаев практически нет, за исключением некоторых частных, например, круглое отверстие в бесконечной упруго-пластической среде Мора-Кулона (пример 3).

Решение упругих задач с использованием МКЭ не вызывает вычислительных трудностей и позволяет достаточно точно оценить работу основных алгоритмов

МКЭ, заложенных в ПК, путем сравнения результатов с классическими строгими аналитическими решениями теории упругости (примеры 1,2,4,5,6,7).

Иначе дело обстоит с получением решения МКЭ когда задача заключается в определении предельного НДС состояния (примеры 8,9). Аналитическое решение изначально рассматривает предельное состояние, а процесс перехода в это состояние не рассматривается. В случае численного решения, рассматривается весь процесс (рост нагрузки) когда система проходит путь от полностью упругого состояния к полностью пластичному состоянию (состоянию предельного равновесия), что является сложным испытанием для нелинейного решателя (п. 5.3.2 настоящего отчета) и алгоритма получения упруго-пластического решения (п. 5.2 настоящего отчета).

Последний пример 10 отличается от остальных тем, что в качестве эталонного решения используются результаты вычислений полностью аналогичной задачи в другом ПК, также реализующем МКЭ. Совпадение результатов расчета не может служить абсолютным критерием точности полученных результатов, однако это гарантирует то, что алгоритмы заложенные в решении работают верно, что также не маловажно для верификации.

Наибольший интерес представляют примеры, предложенные экспертами и составителями отчета. Эталонными решениями здесь являлись не только теоретические но и результаты натурных испытаний, решения других ПК в том числе и решение ANSYS. При этом особое внимание уделялось анализу точности в зависимости от крупности КЭ сетки, а также типов (топологии) применяемых элементов.

Список рассмотренных примеров представлен ниже.

- 1) *Статический расчет шарнирно опертой балки*
- 2) *Статический расчет прямоугольной пластинки, три края которой заземлены, четвертый свободен*
- 3) *Статический расчет кольцевой пластины*
- 4) *Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде*

- 5) *Круглый фундамент на упругом полупространстве. Контактная задача.*
- 6) *Моделирование испытания на трехосное сжатие*
- 7) *Моделирование испытания на одноплоскостной срез*
- 8) *Определение активного и пассивного давления грунта на подпорную стенку*
- 9) *Расчет устойчивости насыпи*
- 10) *Расширение цилиндрической скважины в упруго-пластической среде*
- 11) *Пластическое нагружение толстостенного цилиндра*
- 12) *Статический расчет прямоугольной в плане фундаментной плиты*
- 13) *Статический расчет каркасно-монолитного здания на упруго-пластическом основании*
- 14) *Моделирование испытания сваи на вертикальную нагрузку*
- 15) *Комбинированный свайный фундамент при действии горизонтальной нагрузки*
- 16) *Пластическое нагружение балки прямоугольного сечения*

В решении широкого круга геотехнических задач одним из важных вопросов является не только поределение актуального НДС грунтового массива, но и определения внутренних усилий и перемещений конструкций, некоторым образом взаимодействующих с основанием. Поэтому *первые 3 примера* (примеры 1,2,3) посвящены анализу статического расчета конструкций, а именно балочных и оболочечных элементов, используемых при моделирования фундаментных плит с балочной и безбалочной схемы, гибких ограждающих конструкций, обделок тоннелей и т.д.

В четвертом примере рассматривается чувствительность решения МКЭ к коэффициенту Пуассона, в то время как в аналитическом решении значения напряжений не зависят от этого коэффициента.

В пятом примере рассмотрено прямое нагружение круглого фундамента на упругом полупространстве с анализом точности в зависимости от типа трехмерных элементов.

Следующие примеры уже касались упруго-пластических моделей материала (модели Мора-Кулона, Друккера-Прагера).

Шестой пример является наиболее важным для верификации самих моделей грунта. Тестовый пример заключается в определении предельного НДС в образце цилиндрической формы, и последующей подстановкой полученных главных напряжений в уравнения условий текучести (таблица 2). Для данного тестового примера не нужно эталонное решение так как результаты (главные напряжения при разрушении), полученные при расчете, с использованием определяющих уравнений модели (таблица 2) позволяют протестировать работу модели материала в начальной стадии пластического течения.

Седьмой пример моделирует испытания образца грунта на одноплоскостной срез. В результате вычислений для трех значений вертикального давления определяется сдвиговая нагрузка на образец, приводящая к разрушению. Положительным результатом данного теста является соответствие сдвиговой нагрузки силе сцепления, вычисляемой по известному Кулона с использованием прочностных характеристик (c, φ), изначально заложенных в расчетную модель. Несмотря на то, что плоскость по которой предполагается сдвиг уже задана самой геометрией модели (сдвигового прибора), в образце в отличие от трехосного сжатия возникает сложное НДС, где пластические зоны выходят за рамки поверхности сдвига и поэтому данный пример с вычислительной точки зрения является достаточно сложной задачей для упруго-пластического расчета.

Восьмой пример аналогичен 6,9,10 примеру из тома 2, однако здесь уже рассматривается не вертикально давление на штамп, а горизонтальное давление грунта на подпорную стенку в зависимости от ее перемещений. Целью данного примера является получение горизонтального давления грунта в предельном состоянии и сравнение с известными зависимостями об активном и пассивном давлении по Кулону.

Далее (*пример 9*) на примере насыпи, рассмотренной в книге Фадеева А.Б.[14], в основании которой имеется тонкий слой слабого грунта, всесторонне была разобрана задача анализа устойчивости грунтового массива. Учитывая всю

сложность и известную неопределенность в данном вопросе, в качестве "эталонных" решений были приняты данные натурных испытаний [14], решение МКЭ Фадеева А.Б и решение Федоровского В.Г.[37].

10 пример интересен тем, что имеющееся аналитическое решение выполнено для бесконечных границ [15], в то время как конечно-элементная модель всегда конечна.

В *11 примере* для осесимметричного и пространственного НДС рассматривается возможность использования модель грунта Мора-Кулона для описания упругопластического поведения стали по теории прочности Треска-Сенвенана. Здесь также отражено влияние крупности сетки и типов конечных элементов на точность решения.

Далее рассматриваются примеры, касающиеся реальных задач строительной практики. Здесь для сравнения в основном используются данные натурных испытаний или численные решения других ПК.

В *примерах 12, 13* выполнен расчет фундаментной плиты на упругопластическом основании, результаты которого сравниваются с аналогичными решениями в ПК PLAXIS и ПК ANSYS. При этом также оценивается влияние крупности сетки на результаты.

В *примере 14* для сравнения используются как натурные испытания, так и упругопластическое решение (МКЭ) Д. М. Шапиро [6]. При моделировании в ПК MIDAS GTS рассмотрены различные варианты задания сваи, а также пространственное и осесимметричное НДС.

Для *примера 15* использованы данные натурных испытаний свайного куста на горизонтальную нагрузку [20]. Основной задачей тестового примера было сравнение расчетной эпюры моментов с фактической, замеренной при испытании. При этом значительную неопределенность в результаты расчета вносит наличие ростверка, роль которого в данной конструктивной схеме трудно измерима, что делает данную задачу с практической точки зрения особенно подходящей для решения методами МКЭ.

16 пример показывает возможность использования модели плоской деформации в сочетании с моделью Материала Мора-Кулона для упругопластического расчета балки или балки-стенки по теории прочности Треска. Основное внимание здесь уделено численному определению предельной равномерно-распределенной нагрузки и соответствующей ее зоне пластического течения, которые также можно получить аналитическим путем [21].

8 Результаты верификации

Целью расчета геотехнических задач является определение следующих параметров:

- компонентов напряжений в грунтовом массиве;
- компонентов перемещений и деформаций грунтового массива;
- размеров зон предельного состояния;
- внутренних усилий в конструкциях взаимодействующих с основанием;
- коэффициента запаса устойчивости системы "сооружение-грунт".

При этом в рамках данной верификации не рассматривались задачи, включающие необходимость определения порового давления воды в грунте.

Положительным результатом верификации в целом является соответствие расчетных параметров значениям "эталонного решения" с допустимой погрешностью. Погрешность определяется путем сравнения результатов расчета с "эталонными" решениями по формуле:

$$\delta = \left| \frac{A-B}{B} \right| \cdot 100\%,$$

где А - расчетная величина, В - величина "эталонного" решения.

Однако, учитывая некоторую специфику задач геотехники и фундаментостроения, количество эталонных решений, соответствующих точным решениям весьма не велико и не покрывает основного объема практических задач, решаемых сегодня с использованием процедур и алгоритмов МКЭ. При этом большинство аналитических решений выполнено также с определенными допущениями и предположениями, которые оказываются не нужны при получении решения в МКЭ, что соответственно дает более точный результат, чем некоторые строгие аналитические решения. Поэтому даже в упругих задачах

отклонения значений более 5-10 % ожидаемо ввиду различных постановок (например, большинство упругих задач решается в напряжениях, а МКЭ решает в перемещениях), а также граничных условий. В случае решения задач, подразумевающих пластическое течение, сопоставимых результатов (имеется ввиду сопоставимых с аналитическими решениями) можно ожидать на границах состояния материала (полностью упругая работа или полностью пластичная), при этом точность также колеблется в рамках 5-10 %.

Что касается промежуточного состояния материала (упруго-пластического), адекватные результаты сопоставления можно получить лишь при сравнении с альтернативными ПК или с натурными данными, хотя это и осложнено определением и последующим вводом в математическую модель расчетных параметров (характеристик грунта), соответствующих грунту натурального испытания.

Таким образом, учитывая вышесказанное, оценка работы ПК не может дана только лишь на основе анализа погрешностей. Большую роль играет личное мнение независимых экспертов, являющиеся авторами теоретических и численных решений ряда задач механики грунтов оснований и фундаментов, а также разработчиками собственных ПК, реализующих алгоритмы МКЭ и др. численных методов.

9 Проект свидетельства РААСН о верификации ПК MIDAS GTS

ПРИЛОЖЕНИЕ К СВИДЕТЕЛЬСТВУ О ВЕРИФИКАЦИИ ПС

№ 01/ MIDAS GTS/2012

Возможности комплекса, подтвержденные верификацией

Midas GTS –программный комплекс, реализующий метод конечных элементов для решения задач в области расчета оснований, фундаментов и подземных сооружений.

Виды моделируемых сооружений, строительных конструкций, сред

Пространственные, комбинированные (система сооружение-основание из различных материалов-сред), включая:

- подземные сооружения;
- грунтовое основание;
- фундаменты зданий и сооружений.

Граничные (краевые) условия

Заданные перемещения и кинематические связи групп узлов

Нагрузки и воздействия

- статические объемные, поверхностные, линейные и узловые силы и моменты

Типы решаемых задач (виды расчетов)

Статический расчет (Static Stress Analysis)

- Линейный (Linear static stress analysis);
- Нелинейный упругий и упруго пластический анализ (Nonlinear elastic & elasto-plastic analysis);

Расчеты коэффициента запаса устойчивости

- Метод снижения прочностных характеристик (Strength reduction method)

Нелинейные факторы

- физическая нелинейность в рамках рассмотренных моделей материала

Модели поведения материалов

- линейно-упругая модель;
- упруго-пластическая модель Мора-Кулона;
- упруго-пластическая модель Друккера-Прагера.

Методы решения (расчета)

Метод конечных элементов в перемещениях для задач определения НДС с представительной библиотекой КЭ, включающий эффективные «решатели» большеразмерных статических линейных и нелинейных задач:

- ***Методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*** - мультифронтальный решатель;

- **Нелинейные решатели** - Метод Ньютона-Рафсона (Newton-Raphson method) с возможностью автоматического задания шага нагрузки.

Набор верифицированных конечных элементов

Из библиотеки программного комплекса верифицированы следующие элементы (см. матрицы верификации (составная часть верификационного отчета), включая одно-, двух- и трехмерные КЭ, а также их допустимые комбинации в одной КЭ-модели:

А) Трехмерные элементы для моделирования поведения грунта и массивных конструкций

- 4 - х узловой тетраэдр;
- 8 - ми узловой гексаэдр;
- 10 - ти узловой тетраэдр;
- 20 - ти узловой гексаэдр;

Б) Двумерные элементы для моделирования поведения грунта
Элементы плоской деформации и осесимметричные элементы:

- 3-х узловой треугольник;
- 6-ти узловой треугольник;
- 4-х узловой четырех угольник;
- 8-ми узловой четырех угольник;

В) Двумерные элементы для моделирования конструкций
Изгибаемый пластинчатый элемент (элемент оболочки);

Г) Одномерные элементы для моделирования конструкций

Балочный изгибаемый элемент

Д) Интерфейсные элементы

- 1D интерфейсный элемент
- 2D интерфейсный элемент

Е) Специальные элементы

- свайный элемент
- односторонние связи
- жесткие связи

Ограничения на размерность

«Подъемные» размерности КЭ-модели (количество степеней свободы) ограничены доступной оперативной и дисковой памятью ЭВМ, разрядностью процессора и операционной системы.

На использовавшейся ПЭВМ (конфигурация WIN 7 64, ОП 8 Гб, задействовано одно ядро процессора частотой 3.1 ГГц) зафиксированы следующие показатели для задач «большой» размерности:

1 319 658 степеней свободы (уравнений) для статических задач – 10446 с.;

Результаты расчетов

- компоненты напряжений в сплошной среде (пространственное, осесимметричное, плоская деформация);
- компоненты перемещений грунтового массива;
- размеры зон предельного состояния (зоны пластичности);

- внутренние усилия в конструкциях взаимодействующих с основанием;
- коэффициент запаса устойчивости системы "сооружение-грунт" (для модели Мора-Кулона).

Точность численных результатов

Зависит от класса (типа) задач, «качества» построенной КЭ-модели (сетки) и, в особенности для нелинейных задач. Подробно – в матрицах верификации для решенных задач.

Расхождение с "эталонными" результатами для упругих задач не превышает 10%, а для физически нелинейных задач может достигать 15-20%.

Сведения о базах данных (библиотеках констант), используемых в Midas GTS

Встроенных в текст программы физических констант нет. Все физико-механические, геометрические, жёсткостные, инерционные и диссипативные характеристики задаются явно в исходных данных.

Официальные эксперты

профессор кафедры строительной механики
Воронежского архитектурно-строительного
университета,
докт. техн. наук,

Д.М. Шапиро

Зав. лабораторией механики грунтов
НИИОСП им. Н.М. Герсевича – структурное
подразделение ОАО «НИЦ «Строительство»,
канд. техн. наук

В.Г. Федоровский

М.И. Карабаев

**Председатель Научного Совета РААСН
"Программные средства в строительстве и
архитектуре»,
докт. техн. наук, проф.**

В.Н. Сидоров

Список используемой литературы

1. MIDAS GTS. Analysis Reference. Part I - Analysis Case.
2. MIDAS GTS. Analysis Reference. Part II - Finite element formulation.
3. MIDAS GTS. Analysis Reference. Part III - Constitutive models.
4. MIDAS GTS. Analysis Reference. Part IV - Numerical Analysis.
5. MIDAS GTS. Verification manual.
6. Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники: монография / Д. М. Шапиро. - Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. -164 с.
7. Диссертация. Расчет свайно-плитных фундаментов из забивных свай с учетом образования карстового провала. Гоман Н.З. Уфа 2004.
8. S. Timoshenko, *Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems*, 3rd Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1955, pg. 98, problem 4
9. S. Timoshenko, *Theory of plates and shells*, McGRAW-HILL BGGK Co., Inc., New York, NY, Toronto, London, 1959, pg. 240
10. Н.И. Безухов, Основы теории упругости, пластичности и ползучести, Москва, 1961, §14.13, стр. 353.
11. Н. И. Безухов. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Государственное издательство «Высшая школа». Москва – 1961.
12. Н. А. Цытович. Механика грунтов. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва – 1963.
13. Chang-Yu Ou. *Deep Excavations. Theory and Practice*. – London, Taylor & Francis, 2006. – 532 p.
14. А.Б. Фадеев “Метод конечных элементов в геомеханике”. (М. Недра, 1987, стр. 128-130)
15. В.Г. Федоровский, О расширении цилиндрической скважины в упруго-пластической среде. Основания, фундаменты и механика грунтов. стр. 28-30
16. S. Timoshenko, *Strength of Material, Part II, Elementary Theory and Problems*, 3rd Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1956, pg. 388, article 70

17. Plaxis 3D Foundation Tutorial Manual version 1.5, Lesson 1 (Raft foundation on overconsolidated clay)
18. С.О. Шулятьев, В.Г. Федоровский, С.И. Дубинский. Расчет фундаментной плиты в составе здания с полным каркасом методом численного моделирования с учетом последовательности возведения // Численные методы расчетов в практической геотехнике: сборник статей научно-технической конференции; СПбГАСУ. - СПб., 2012.-398 с. стр. 36-44.
19. Диссертация. Расчет свайно-плитных фундаментов из забивных свай с учетом образования карстового провала. Гоман Н.З. Уфа 2004.
20. П.И. Яковлев, А.Л. Готман, Р.Г. Курмаев, Взаимодействие сооружений с грунтами и свайные основания, Одесса, 2004, стр. 395-397, 435-449
21. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Москва, 1954
22. Jaeger, J. C., and N. G. W. Cook. *Fundamentals of Rock Mechanics*, 3rd Ed. London: Chapman and Hall, 1976.
23. Goodman, R. E., *Introduction to Rock Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.
24. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York, 1970.
25. Einstein, H. H., and Schwartz, C.W., "Simplified Analysis for Tunnel Supports.," *J. Geotech. Engr. Div.*, V. 105 (GT4), 1979, pp. 499-518.
26. Salencon, J., "Contraction Quasi-Statique D'une Cavite a Symetrie Spherique Ou Cylindrique Dans Un Milieu Elastoplastique," *Annales Des Ponts Et Chaussees*, No. 4, 1969, pp. 231-236.
27. Giroud, J.P., *Tables pour le calcul des foundations*, V. 1, Dunod, Paris, 1972.
28. Gibson, R.E., "Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space," *Geotechnique*, Vol. 17, 1967, pp. 58-64.
29. Cox, A. D.; Eason, G.; and Hopkins, H. G.; "Axially Symmetric Plastic Deformations in Soils," *Trans. R. Soc., S er. A*, 254:1, London, 1961.

30. Chen, W. F., "Limit Analysis and Soil Plasticity", *Developments in Geotechnical Engineering 7*, Elsevier Scientific Publishing Co., New York, 1961.
31. Sloan, S. W. and Randolph, M. F., "Numerical Predictions of Collapse Loads Using Finite Element Methods," *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomech.*, **V**, 6, 1982, pp. 47-76.
32. Terzaghi, K., and Peck, R. B., *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1967.
33. Chen, W. F., "Bearing Capacity of Square, Rectangular and Circular Footings," *Limit Analysis and Soil Plasticity, Developments in Geotechnical Engineering 7*, Ch. 7, pp. 295-340, New York: Elsevier Scientific Publishing Co., 1975.
34. Shield, R. T., and Drucker, D. C., "The Application of Limit Analysis to Punch-Indentation Problems," *J. Appl. Mech.*, **20**, pp. 453-460, 1953.
35. "PENTAGON-3D User Guide", Emerald Soft.
36. Друккер Д., Прагер Б. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы механики грунтов / Под ред. В.Н. Николаевского. - М., 1975. - с. 166-177.
37. Федоровский В.Г. , Курилло С.В. Метод переменной степени мобилизации сопротивления сдвигу для расчета прочности грунтовых массивов // Основания и фундаменты и механика грунтов, 1998, №4-5